



# Intégrateurs temporels basés sur la resommation des séries divergentes : applications en mécanique

Ahmad Deeb

## ► To cite this version:

Ahmad Deeb. Intégrateurs temporels basés sur la resommation des séries divergentes : applications en mécanique. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université de La Rochelle; Université Libanaise, 2015. Français. NNT : 2015LAROS033 . tel-01373435

**HAL Id: tel-01373435**

**<https://theses.hal.science/tel-01373435>**

Submitted on 28 Sep 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École doctorale SI-MMEA :  
Sciences et Ingénierie en Matériaux, Mécanique, Énergétique et Aéronautique

# THÈSE

pour obtenir le grade de docteur  
Spécialité “Mécanique”

délivré par l’  
**Université de La Rochelle**

---

## Intégrateurs temporels basés sur la resommation des séries divergentes. Applications en mécanique

*présentée par*

**Ahmad DEEB**

Soutenue publiquement le 17 décembre 2015

---

*devant le Jury composé de*

<b>M. Alain Cimetière</b>	Professeur, Université de Poitiers	Président
<b>M. Mejdî Azaïez</b>	Professeur, ENSCBP Bordeaux	Rapporteur
<b>M. Jean-Marc Cadou</b>	Maître de Conférences-HDR, Université de Bretagne Sud	Rapporteur
<b>M. Aziz Hamdouni</b>	Professeur, Université de La Rochelle	Directeur
<b>M. Mustapha Jazar</b>	Professeur, Université Libanaise	Examineur
<b>M. Mokhtar Kirane</b>	Professeur, Université de La Rochelle	Examineur
<b>M. Dina Razafindralandy</b>	Maître de Conférences, Université de La Rochelle	Directeur

**Université de La Rochelle**  
**Laboratoire des Sciences de l’Ingénieur pour l’Environnement (LaSIE)**  
UMR CNRS 7356



# Remerciements

*Il me sera très difficile de remercier tout le monde car c'est grâce à l'aide de nombreuses personnes que j'ai pu mener cette thèse à son terme.*

*Je voudrais tout d'abord remercier grandement mes directeurs de thèse, Aziz HAMDOUNI et Dina RAZAFINDRALANDY, pour toutes leurs aides. Je n'aurais jamais pu soutenir cette thèse sans leur soutien. Leurs conseils manœuvraient mon comportement comme l'action de l'opérateur de la somme de Borel sur les séries entières, à chaque fois qu'il divergea, ils le resommaient et le redressaient.*

*Je suis ravi d'avoir travaillé en compagnie de Dina car outre son appui scientifique et ses outils pédagogiques, son côté humain a toujours été là pour me soutenir. Je remercie également Aziz qui m'a ouvert l'esprit et m'a conseillé au cours de l'élaboration de cette thèse. Je n'oublie jamais le profit qu'il a apporté sur le développement et l'amélioration de ma pensée. Je remercie Mustapha JAZAR, notre "godfather" au Liban, qui m'a proposé un stage en master 2 avec mes directeurs et m'a permis d'avoir cette thèse. Sans eux, je n'aurais pas été là.*

*Mes salutations s'adressent à Mejdi AZAEÏZ et Jean-Marc CADOU d'avoir accepté de relire cette thèse et d'en être rapporteurs. Leurs commentaires ont apporté de la valeur à ce travail. Mes remerciements vont aussi à Mokhtar KIRANE d'avoir accepté de relire cette thèse et d'en être examinateur. Je tiens à remercier infiniment Alain CIMETIÈRE d'avoir accepté d'être président du jury, et dont j'apprécie les remarques sur les fondements mathématiques de ce travail. La version finale de ce mémoire a bénéficié de leur lecture très attentive et de leurs remarques précieuses.*

*Je tiens à remercier toutes les personnes avec qui j'ai pu discuter sur des sujets divers et variés. Entre autres, Nora, Rayan, Alexandra, Jana, Laurent, Valérian, Ahmed, Abdel, Thomas, Malek, Jean-Louis, Kevin, Zaïd, Adrien, ... Mes remerciements vont également aux membres de notre laboratoire LaSIE spécialement son directeur Karim AÏT MOKHTAR qui m'a assuré les conditions optimales pour accomplir cette thèse.*

*Je remercie l'école Doctorale SI-MMEA et en particulier Isabelle HIRSCH et Jennifer DE LA CORTE GOMEZ Pour leur travail, leur disponibilité et leur gentillesse.*

*J'ai une pensée particulière envers...*

*Mes collègues du bureau : Laurent et sa maîtrise de son sujet et son aide au niveau de l'intégration dans la société française, Valérian et sa générosité surtout au niveau des ouvrages et des outils informatiques dans la simulation, Ahmed et sa volonté de refaire ses études après 8 ans d'interruption et Thomas ,le jeune chercheur, qui a rajeuni notre bureau par ses propositions de soirées et que rarement nous l'avons suivi.*

*Les cours des cafés avec mes amis du Liban : Omar et son talent politique, Mohamad et son objectif de construire sa propre école ...*

*Les moments que j'ai vécus avec la communauté Libanaise à La Rochelle : Rayan l'énergique et le soldat , Jana la courageuse, Ibrahim le marrant, Marwan l'optimiste, Hassan le déterministe, Saad le généreux ...*

*Nissrine le "commidant". Je la remercie infiniment car c'est grâce à elle, à son honnêteté et son perfectionnisme que j'enrichis toujours mes qualités humaines.*

*Je manifeste ma gratitude à toute ma famille et surtout mes sœurs Houda et Hayat qui me soutiennent tous les jours et m'offrent en sacrifice toutes les choses nécessaires pour continuer à réaliser mes rêves.*

*À mes parents, je voudrais que vous sachiez que c'est grâce à vous, surtout toi papa, que j'ai pu poursuivre le rêve que tu as bâti.*

À mon père,



# Chapitre 1

## Introduction générale

Les schémas habituels de résolution numérique de problèmes d'évolution se basent sur une discrétisation temporelle et, si le problème est modélisé par une équation aux dérivées partielles, une discrétisation spatiale. Cette dernière est souvent réalisée par une méthode spectrale [GO86, CHQZ07], par différences finies [Hir07], par volumes finis [Lev02] ou par la méthode des éléments finis [ADM11, CL09, Cia02, FG14]. Quant à la discrétisation temporelle, les méthodes les plus usuelles sont celle d'Euler, de Crank-Nicholson, de Runge-Kutta, d'Adams-Bashforth, ... [Lam91, But08, Wes09, CCC10].

La plupart des schémas de discrétisation temporelle, reproduisent la solution à des instants discrets, séparés par un pas  $\Delta t$ . Ce pas de temps est généralement très faible. Il est par exemple de l'ordre de la milliseconde pour la simulation d'un écoulement de fluide dans une chambre ventilée, alors que l'échelle de temps caractéristique des phénomènes qu'on souhaite observer varie de quelques secondes à quelques heures [AvdM92, DF95]. Ainsi, le nombre d'itérations nécessaires, et par conséquent le temps de calcul, est extrêmement élevé. Ce coût est encore plus élevé si l'on souhaite étudier la dispersion de particules convectées par l'écoulement. En effet, dans ce cas, le pas de temps est de l'ordre de la nanoseconde [BJC05].

Pour être stable, le schéma d'Euler explicite impose un pas de temps  $\Delta t$  très faible. D'autres schémas, comme la méthode d'Euler implicite, permettent de prendre un pas de temps plus important. Mais cela impose une inversion de matrice à chaque itération, inversion coûteuse en termes de temps de calcul. Un de nos objectifs est



de proposer une alternative à ces méthodes en présentant un schéma numérique qui, comme les méthodes explicites, nécessite au plus une inversion de matrice, et qui n'est pas assujéti à une condition contraignante de stabilité. On peut ainsi espérer rendre les calculs plus rapides lors de la simulation de phénomènes qui se déroulent sur un grand intervalle de temps.

Le gain au niveau du temps de calcul n'est cependant pas le seul but envisagé. En effet, les phénomènes physiques, même à grands intervalles de temps, sont souvent associés à des propriétés d'invariance. Et une bonne modélisation numérique de ces phénomènes doit respecter ces invariances. On sait, par exemple, que pour un problème d'évolution modélisé par un système hamiltonien [MHO13], le volume dans l'espace des phases est conservé (théorème de Liouville). Et pourtant, beaucoup de schémas, comme les schémas d'Euler explicite et implicite, détruisent cette propriété au niveau discret [SS92, Chh08]. Un raffinement du pas de temps ne permet pas de surpasser le problème. Pour respecter les propriétés physiques liées aux équations, des intégrateurs géométriques ont été développés [HLW02, SSC94, SS91, CHHS11]. Ils se basent sur la structure géométrique des équations (symplécticité, groupe de symétrie, ...). Ces intégrateurs géométriques permettent d'avoir, par exemple, des solutions fiables pour les problèmes d'évolution temporelle sur les grands intervalles de temps, dont la conservation de l'Hamiltonien est un enjeu.

Un autre but de la thèse est donc de s'assurer que, même sans être un intégrateur géométrique, notre schéma respecte les propriétés géométriques des équations à un ordre arbitrairement élevé.

Le schéma qu'on propose se base sur une décomposition en série temporelle de la solution, suivie de la méthode de resommation des séries divergentes développée par Borel [Bor01]. Cette resommation est indispensable si la série initiale est divergente. Et si la série est convergente, la resommation permet d'en étendre le domaine de validité. Outre les avantages déjà cités, notre schéma donne une solution analytique dans l'espace temporel continu (et non pas à des temps discrets). Par ailleurs, la décomposition en série linéarise naturellement un problème initialement non linéaire.

La méthode de décomposition en série, parfois appelée méthode de perturbation [BO99, Mur99] ou méthode asymptotique, est utilisée depuis très longtemps. Les

premières applications s'adressent à la mécanique céleste. Elle a été utilisée pour l'étude du problème des trois corps qu'on peut voir comme le problème de deux corps soumis à une perturbation due à un troisième corps de masse très petite [Dub75, Bru95]. En mécanique quantique, Schrödinger a présenté la théorie de perturbations stationnaires [Sch26] qui consiste à trouver la solution d'un système perturbé par un Hamiltonien indépendant du temps, comme la perturbation des raies spectrales de l'atome d'hydrogène par un potentiel électrique [CSJT01].

La méthode asymptotique a également été utilisée intensivement en mécanique des solides, à cause de sa capacité à détecter les bifurcations et à suivre les branches solutions [DPF90, CDPF07, VCDPF98]. Elle est particulièrement adaptée à l'étude, par exemple, du flambage. Enfin, en mécanique de fluide stationnaire elle a été utilisée pour l'étude de l'effet Coanda [ACHR04, VD64, Dup66, Cad97] et des bifurcations de Hopf [HGG<sup>+</sup>13].

Dans les quelques exemples qu'on vient de citer, le paramètre de développement de la série est généralement un petit paramètre de perturbation. Lors de la résolution d'un problème d'évolution, il est naturel de prendre le temps comme paramètre de développement. Toutefois, dans ce cas, une attention particulière doit être observée car la plupart des séries temporelles qui apparaissent en physique sont divergentes [Hal97]. C'est le cas par exemple des solutions formelles des équations de la chaleur, de Burgers ou de Navier-Stokes [Hal97, LMS99, LM08, Lys09a, CT06].

Toutefois, la divergence des séries n'est pas forcément un handicap. Par exemple, Loeffel a prouvé, pour l'oscillateur anharmonique correspondant au hamiltonien perturbé [Sim70]

$$H(p, q) = p^2 + q^2 + \epsilon q^{2s}, \quad (1.1)$$

que la série en  $\epsilon$ , bien que divergente, peut être utilisée afin de calculer des approximations de Padé qui peuvent converger vers une solution analytique [LMSW69]. Par contre la convergence n'est assurée que pour  $s \leq 2$ . Prenons un autre exemple, l'équation d'Airy qui décrit la position des franges caustiques. Airy a développé la solution

$$Ai(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos\left(\frac{1}{3}t^3 + zt\right) \quad (1.2)$$

sous forme d’une série convergente au voisinage de zéro. Faisant ainsi, il n’a pu calculer que la position des deux premières franges. Ceci est dû au fait que la série converge lentement. Stokes, s’est ramené à un calcul à l’infini grâce à un changement de variable. Il a alors réussi à calculer les trente premières franges en utilisant un développement en série, cette fois-ci, divergente, au voisinage de l’infini [Ram12b, Ram93]. En effet, avec cette dernière série, bien peu de termes suffisent pour avoir une approximation suffisante. Avant le problème d’Airy, les astronomes ont aussi déjà manipulé des séries divergentes pour l’étude de la stabilité du système solaire. Cela les a conduit à des prédictions très précises.

Les séries divergentes peuvent donc amener à des résultats satisfaisants, à condition de savoir les manipuler, savoir les “sommer”. Quelques méthodes de sommation de série divergentes ont été proposées dont celles d’Abel, de Cesàro, d’Euler, .... Mais la plus efficace pour être intégrée dans un schéma numérique est celle de Borel [Bor88, Ram93, Tho91]. Appelée aussi méthode de Borel-Laplace dans ce document, elle permet de calculer, à partir d’une série qui est solution formelle d’une équation, une fonction analytique également solution dans un certain domaine. La principale condition pour que la méthode de resommation de Borel-Laplace puisse être appliquée est que la série soit de Gevrey d’un certain indice  $k > 0$  (c-à-d ne diverge pas plus vite que la série de terme général  $(n!)^{1/k}$ ). Heureusement, c’est le cas de la plupart des problèmes rencontrés en physique [Mai03].

Un schéma d’intégration temporelle basé sur la décomposition en série temporelle, suivie d’un premier algorithme de resommation a été développé et validé par Hamdouni et Razafindralandy dans [Raz05, RHA08]. La resommation y a été réalisée par l’algorithme Borel-Padé-Laplace. Dans ces travaux, il a été montré que le schéma permettait de réduire (parfois jusqu’à des milliers de fois) le nombre d’itérations nécessaire pour la résolution de certains problèmes. Le premier but de la présente thèse est de conforter ces résultats. Le deuxième but sera d’étudier les propriétés du schéma vis-à-vis du respect des lois de conservation. On présentera ensuite des applications à la résolution des équations de la mécanique des fluides, dont celles de Navier-Stokes, associées à une discrétisation spatiale par éléments finis. Un dernier but est d’analyser une alternative à l’algorithme Borel-Padé-Laplace pour le calcul de

la somme de la série. Cette alternative se base sur les séries de factorielles inversées.

Ce document est organisé comme suit. Dans le chapitre 2, on rappellera la fondation de la théorie de resommation de Borel-Laplace. On reviendra, en particulier, sur la notion d'asymptotique selon Poincaré, et sa restriction à la notion d'asymptotique de Gevrey. Dans le chapitre 3, on présentera l'algorithme Borel-Padé-Laplace tel qu'il a été développé dans [Raz05, RHA08]. On y donnera des résultats sur les équations différentielles qui montrent que notre schéma est plus rapide (en termes de nombre d'itérations) que les schémas classiques. Ce chapitre sera essentiellement bibliographique.

Le véritable apport de la thèse sera exposé à partir du chapitre 4. Dans ce chapitre, on étudiera les qualités du schéma vis-à-vis des propriétés d'invariance des équations. Dans le chapitre 5, on appliquera alors notre schéma à la résolution d'équations aux dérivées partielles liées à des problèmes de mécanique des fluides. Dans le dernier chapitre, on explorera les limites de l'algorithme Borel-Padé-Laplace et examinera un algorithme alternatif, basé sur les séries de factorielles généralisées, permettant de calculer la somme de Borel.



## Chapitre 2

# Asymptotiques et resommation de Borel-Laplace

On cherche une série entière formelle de la forme

$$\hat{u}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n \tag{2.1}$$

qui est solution formelle d’une équation différentielle. Souvent, les termes  $u_n$  de la série peuvent être calculés jusqu’à l’ordre souhaité à partir des conditions initiales en insérant (2.1) dans l’équation différentielle. C’est le procédé classique de la méthode asymptotique [BO99]. Ce procédé est utilisé dans de nombreux domaines, où la somme partielle est utilisée comme une approximation de la solution. Lorsque la série  $\hat{u}$  est divergente, tout l’art est alors de déterminer l’ordre optimal où “couper” la série. En effet, lorsqu’on atteint cet ordre optimal, ajouter plus de termes dégradera la qualité de l’approximation. En fait, dans la plupart des cas, lorsque la série diverge, les termes  $u_n$  diminuent d’abord, jusqu’à un ordre  $n_0$ , puis croissent, si bien que la suite des sommes partielles ne puisse converger. C’est précisément alors à cet ordre  $n_0$  que la somme partielle approche le mieux la solution de l’équation. On dit alors qu’on fait une *sommation au plus petit terme*. Les astronomes avaient utilisé cette technique pour leurs prédictions. Cette observation a conduit Poincaré à écrire dans son mémoire [Poi92] :

---

*Il y a entre les géomètres et les astronomes une sorte de malentendu au sujet de la signification du mot convergence. Les géomètres, préoccupés de la parfaite rigueur et souvent trop indifférents à la longueur de calculs inextricables dont ils conçoivent la possibilité, sans songer à les entreprendre effectivement, disent qu'une série est convergente quand la somme des termes tend vers une limite déterminée, quand même les premiers termes diminueraient très lentement. Les astronomes, au contraire, ont coutume de dire qu'une série converge quand les 20 premiers termes, par exemple, diminuent très rapidement, quand même les termes suivants devraient croître indéfiniment.*

La série (2.1) est en fait le “développement asymptotique” d’une fonction holomorphe qui est également solution de l’équation différentielle dans un certain domaine. Notre but n’est pas d’effectuer une sommation au plus petit terme mais de calculer cette fonction holomorphe à partir de la série, grâce à la théorie de resommation de Borel-Laplace.

Dans la prochaine section, on va exposer de manière assez simple la resommation de Borel-Laplace. On verra que Borel l’a établie en étendant la méthode de Cesàro. La théorie sur laquelle se fonde la resommation de Borel est l’asymptotique dite de Gevrey qui est une restriction de l’asymptotique usuelle de Poincaré. Dans la section 2.2, nous rappellerons la théorie de l’asymptotique de Poincaré [Poi92]. Nous verrons également la faiblesse principale de la théorie. Ensuite, nous exposerons la théorie de l’asymptotique de Gevrey. On justifiera au passage la pertinence de la sommation au plus petit terme dans le cadre Gevrey. Nous terminerons le chapitre par un exposé de la notion de polygone de Newton pour une EDO linéaire et par une méthode de détection de singularité basée sur la transformation de Borel.

Le lecteur intéressé est invité à lire les papiers [Ram12b, Ram12a] de Ramis qui synthétisent bien les travaux sur les développements asymptotiques et la théorie de resommation de Borel.

## 2.1 Aperçu de la sommation de Borel

Dans cette section, toutes les égalités seront formelles : on ne se souciera pas des conditions de convergence des limites et des intégrales. Le but est de montrer comment, de la sommation de Cesàro, on arrive à la sommation de Borel.

Considérons une série

$$\hat{v} = \sum_{n=0}^{\infty} v_n \quad (2.2)$$

et notons

$$s_n = \sum_{k=0}^n v_k$$

la somme partielle. La somme de Cesàro de la série (2.2), lorsqu'elle existe, est la limite

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_0 + s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n+1}. \quad (2.3)$$

Lorsque la série est convergente, sa somme de Cesàro se confond avec la somme habituelle. La méthode de Cesàro est efficace mais a un champ assez limité. Par exemple, elle n'est pas applicable à la série

$$1 - 2 + 4 - 8 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n \quad (2.4)$$

pour laquelle la limite (2.3) n'existe pas. Borel souhaite définir une méthode de sommation plus générale. Il s'y prend de la manière suivante [Bor88].

En pondérant les termes de la sommation (2.3), on peut définir

$$s = \frac{a_0 s_0 + a_1 s_1 + a_2 s_2 + \cdots + a_n s_n + \cdots}{a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots}$$

pour des poids  $a_n$  ayant de bonnes propriétés. Borel choisit la “sommation exponentielle”, c'est-à-dire qu'il prend

$$s = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{s_0 + \frac{b^1}{1!} s_1 + \frac{b^2}{2!} s_2 + \cdots + \frac{b^n}{n!} s_n + \cdots}{1 + \frac{b^1}{1!} + \frac{b^2}{2!} + \cdots + \frac{b^n}{n!} + \cdots} \quad (2.5)$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{s_0 + \frac{b^1}{1!} s_1 + \frac{b^2}{2!} s_2 + \cdots + \frac{b^n}{n!} s_n + \cdots}{e^b} \quad (2.6)$$



On a alors,

$$s = s_0 + \int_0^\infty \frac{d}{db} [e^{-b}s(b)] db \quad (2.7)$$

où  $s(b)$  est le numérateur de (2.6). En développant la dérivée, il suit :

$$s = v_0 + \int_0^\infty e^{-b} B(b) db \quad (2.8)$$

avec

$$B(b) = s'(b) - s(b) = \sum_{n=0}^\infty \frac{v_{n+1}b^n}{n!}.$$

Borel définit comme somme de la série initiale (2.2) l'expression (2.8) lorsque cette dernière est bien définie et dans laquelle  $B(b)$  est considérée comme une fonction entière ou une fonction définie au voisinage de la demi-droite  $\mathbb{R}^+$ .

**Exemple 2.1.1.** Si on applique la procédure de sommation de Borel à la série (2.3), on obtient

$$B(b) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-2)^{n+1}b^n}{n!} = -2e^{-2b}.$$

La somme de Borel est alors

$$s = 1 - 2 \int_0^\infty e^{-b} e^{-2b} db = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

□

Appliquons maintenant la procédure à une série temporelle

$$\hat{u}(t) = \sum_{n=0}^\infty u_n t^n. \quad (2.9)$$

On prend donc  $v_n = u_n t^n$ . on obtient comme somme, lorsque celle-ci est bien définie :

$$s = u_0 + \int_0^\infty e^{-b} B(b) db \quad (2.10)$$

avec

$$B(b) = t \sum_{n=0}^\infty \frac{u_{n+1} t^n b^n}{n!}. \quad (2.11)$$

On effectue le changement de variable  $\xi = tb$ . On obtient alors :

$$s(t) = u_0 + \int_0^\infty \hat{\mathcal{B}}\hat{u}(\xi) e^{-\xi/t} d\xi \quad (2.12)$$

où

$$\hat{\mathcal{B}}\hat{u}(\xi) = \sum_{n=0}^\infty \frac{u_{n+1}\xi^n}{n!}. \quad (2.13)$$

La série (2.13) est appelée transformée de Borel de (2.9). L'intégrale pondérée par l'exponentielle  $e^{-\xi/t}$  dans (2.12) n'est autre que la transformée de Laplace habituelle de  $\hat{\mathcal{B}}\hat{u}(\xi)$  en  $1/t$ .

**Remarque 2.1.2.** *Si  $\hat{u}(t)$  est une série convergente, alors elle est égale à sa somme de Borel dans son disque de convergence. En effet, comme*

$$t^n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty \xi^{n-1} e^{-\xi/t} d\xi : \quad (2.14)$$

on a :

$$s(t) = u_0 + \int_0^\infty \hat{\mathcal{B}}\hat{u}(\xi) e^{-\xi/t} d\xi \quad (2.15)$$

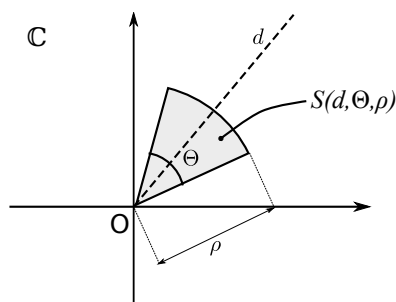
$$= u_0 + \int_0^\infty \left( \sum_{n=0}^\infty \frac{u_{n+1}}{n!} \xi^n \right) e^{-\xi/t} d\xi \quad (2.16)$$

$$= u_0 + \sum_{n=0}^\infty \frac{u_{n+1}}{n!} \int_0^\infty \xi^n e^{-\xi/t} d\xi \quad (2.17)$$

$$= u_0 + \sum_{n=0}^\infty u_{n+1} t^{n+1} = \hat{u}(t). \quad (2.18)$$

Dans (2.15),  $\hat{\mathcal{B}}\hat{u}(\xi)$  est une fonction entière. Mais dans le cas général,  $\hat{\mathcal{B}}\hat{u}(\xi)$  peut n'être convergent qu'au voisinage de zéro. Il faudra alors pouvoir le prolonger analytiquement dans un voisinage de  $\mathbb{R}^+$  pour que la série soit considérée sommable au sens de Borel.

**Remarque 2.1.3.** *La transformation de Borel peut être considérée comme l'inverse de la transformation de Laplace.*

FIGURE 2.1 – Secteur  $S(d, \Theta, \rho)$  du plan complexe

On vient de voir comment, en étendant la sommation de Cesàro, on obtient formellement la sommation de Borel-Laplace. La série  $\hat{u}$  est simplement le développement asymptotique, au sens de Poincaré et au sens de Gevrey, de sa somme  $s(t)$  lorsque cette dernière est bien définie. Dans les deux sections suivantes, on va rappeler la théorie de l'asymptotique de Poincaré et celle de l'asymptotique de Gevrey.

## 2.2 Asymptotique de Poincaré

On désigne par  $S(d, \Theta, \rho)$  un secteur ouvert du plan complexe  $\mathbb{C}$ , de sommet  $O$ , bissecté par la demi-droite  $d$ , d'ouverture  $\Theta > 0$  et de rayon  $\rho > 0$  (voir FIGURE 2.1). Le secteur est dit *infini* si son rayon l'est. On notera  $S(d, \Theta)$  un secteur infini de direction  $d$  et d'ouverture  $\Theta$ . On peut considérer des secteurs d'ouverture plus grand que  $2\pi$  en prenant, à la place de  $\mathbb{C}$ , la surface de Riemann du logarithme.

On note  $\mathbb{C}[[t]]$  l'anneau des séries entières formelles à coefficients complexes de la forme

$$\hat{u} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n. \quad (2.19)$$

**Définition 2.2.1** (Asymptotique de Poincaré). *Soit  $V = S(d, \Theta, \rho)$  un secteur ouvert du plan complexe  $\mathbb{C}$ ,  $u$  une fonction holomorphe sur  $V$  et  $\hat{u} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n \in \mathbb{C}[[t]]$  une série entière. On dit que  $u$  est asymptotique (à l'origine) à  $\hat{u}$  sur*

$V$  et on note :

$$u(t) \sim_V \hat{u}(t) \quad (2.20)$$

si pour tout sous secteur compact  $W$  de  $V \cup \{0\}$  et tout  $N \in \mathbb{N}$ , il existe  $M_{W,N} > 0$  tel que

$$\left| u(t) - \sum_{n=0}^{N-1} u_n t^n \right| \leq M_{W,N} |t|^N, \quad \forall t \in W. \quad (2.21)$$

Dans ce cas, la série  $\hat{u}$  est appelée *développement asymptotique* de  $u$ .  $\blacklozenge$

Dans cette définition, la constante dépend du secteur  $W$  et de  $N$ , mais aucune indication n'est précisée sur cette dépendance.

**Exemple 2.2.2.** Le développement asymptotique d'une fonction analytique dans un disque  $D$  centré en  $O$  et de rayon  $R$  est son développement de Taylor. En effet,

$$\left| u(t) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{u^{(n)}(0)}{n!} t^n \right| = \left| \int_0^t \frac{u^{(N)}(z)}{(N-1)!} (t-z)^{N-1} dz \right| \leq M_{D,N} |t|^N \quad (2.22)$$

où  $M_{D,N} = \sup_{z \in D} \frac{|u^{(N)}(z)|}{N!}$ .  $\square$

Le développement asymptotique d'une fonction  $u$ , lorsqu'il existe, est unique. Les termes  $u_n$  de la série asymptotique  $\hat{u}$  sont calculés d'une manière itérative par la formule de limite :

$$u_n = \lim_{t \rightarrow 0} t^{-n} \left( u(t) - \sum_{k=0}^{n-1} u_k t^k \right) \quad (2.23)$$

On note  $A(V)$  l'ensemble des fonctions holomorphes sur  $V$ , y admettant un développement asymptotique. Remarquons qu'il existe des fonctions holomorphes dans des secteurs et qui n'y admettent pas des développements asymptotiques. Cela est montré dans l'exemple suivant (2.2.3)

**Exemple 2.2.3.** Pour  $\alpha > 1$ , la fonction  $u(t) = \exp(-\frac{1}{t^\alpha})$  n'admet pas un développement asymptotique à l'origine dans le domaine  $D_R = \{t \in \mathbb{C} - \{0\}, \operatorname{Re} \frac{1}{t} > \frac{1}{R}\}$ . En effet, elle n'admet pas de limite lorsque  $t \rightarrow 0$  dans  $D_R$   $\square$

Associé à la dérivation  $\frac{d}{dt}$ ,  $A(V)$  est muni d'une structure d'algèbre différentielle. On peut donc définir un homomorphisme d'algèbres différentielles  $\mathcal{J}$  qui, à toute

fonction de  $A(V)$ , associe son développement asymptotique dans  $V$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{J} : A(V) &\longrightarrow \mathbb{C}[[t]] \\ u &\longmapsto \hat{u}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n \quad \text{tel que} \quad u(t) \sim_V \hat{u}(t) \end{aligned} \quad (2.24)$$

La question qui nous intéresse le plus est de savoir si, à une série solution formelle de l'équation, on peut associer une “vraie” solution analytique. Le théorème suivant, dû à Ramis et Sibuya [RS94] répond à cette question.

**Théorème 2.2.4.** *Soit une fonction  $G(t, Y, Y_1, \dots, Y_n)$  une fonction analytique et soit  $\hat{u}$  une solution formelle de l'équation*

$$G(t, u, u', \dots, u^{(n)}) = 0. \quad (2.25)$$

*Alors, il existe un réel  $k > 0$  de telle sorte que pour chaque secteur  $V = S(d, \Theta, \rho)$  d'ouverture  $\Theta < \pi/k$  et de rayon  $\rho$  assez petit, il existe une fonction  $u$  solution de l'équation (2.25), holomorphe dans  $V$ , qui admet  $\hat{u}$  comme développement asymptotique dans  $V$ . ★*

La démonstration utilise le théorème de *Borel-Ritt* [Was02] qui entre autres signifie la surjectivité de la fonction  $\mathcal{J}$  dans des secteurs d'ouverture assez petit. Cependant, la fonction  $\mathcal{J}$  n'est pas injective, et cela constitue la faiblesse de la théorie de l'asymptotique de Poincaré. En effet, deux fonctions  $u(t) \in A(V)$  et  $u(t) + e^{-1/t}$  possèdent le même développement asymptotique. Le noyau de  $\mathcal{J}$  est engendré par les fonctions de la forme  $e^{-a/t^b}$  pour  $a, b > 0$ .

**Exemple 2.2.5.** Considérons l'exemple fondamental de l'équation d'Euler

$$t^2 \frac{du}{dt} + u = t, \quad u(0) = 0. \quad (2.26)$$

Cette équation a été proposée par Euler dans [Eul60]<sup>1</sup> car sa solution formelle est la série divergente d'une manière factorielle :

$$\hat{u}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (n-1)! t^n \quad (2.27)$$

---

1. Traduit en allemand dans [DA12] et décortiqué en anglais dans [BL76]. Voir aussi [DV10]

pour laquelle il souhaitait définir une somme. Cette série est le développement asymptotique de la fonction

$$E(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-\xi/t}}{1+\xi} d\xi \quad (2.28)$$

dans le secteur infini  $V = \{t \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(t) > 0\} = S(\mathbb{R}^+, \pi)$ . En effet, considérons  $W$  le sous-secteur compact de  $V$  :

$$W = \{t, |\arg(t)| \leq \frac{\pi}{2} - \delta, |t| \leq \rho\} = \overline{S(\mathbb{R}^+, \pi - 2\delta, \rho)} \subset V,$$

où  $\delta > 0$ . Une estimation directe [LR14] prouve que

$$\left| E(t) - \sum_{n=1}^{N-1} (-1)^{n-1} (n-1)! t^n \right| \leq \frac{|t|^N}{(\sin \delta)^N} \int_0^{+\infty} \xi^{N-1} e^{-\xi} d\xi = M_{V,N} |t|^N$$

où  $M_{V,N} = \frac{(N-1)!}{(\sin \delta)^N}$ . Toute fonction  $E(t) + e^{-a/t^b}$  ( $a$  et  $b$  positifs) possède la même série (2.27) comme développement asymptotique mais seul  $E(t)$  est solution de l'équation (2.26). Ainsi, avec la théorie de l'asymptotique de Poincaré, on n'a pas de moyen de trouver parmi les fonctions  $E(t) + e^{-a/t^b}$  la “vraie” solution de l'équation.  $\square$

## 2.3 Asymptotique de Gevrey

La notion d'asymptotique de Poincaré est donc trop générale, dans le sens où une série peut incarner deux fonctions différentes dans un même secteur. La raison est que la dépendance de la constante dans la majoration (2.21) par rapport à  $N$  peut être quelconque. Cela a conduit à une modification de la théorie et la notion d'asymptotique de Gevrey, qui peut être considérée comme un cas particulier de l'asymptotique de Poincaré. On verra que dans le cadre Gevrey, il faudra différencier les secteurs de petite ouverture et les secteurs de grande ouverture. Dans les secteurs de petites ouvertures, la situation sera la même que dans le cadre de l'asymptotique de Poincaré (toute série incarne une ou plusieurs fonctions holomorphes). En revanche, dans les secteurs de grandes ouvertures, la situation est inversée : une série est le développement d'au plus une fonction holomorphe dans ce secteur. Lorsqu'elle existe, c'est cette fonction qui sera considérée comme somme de Borel de la série.

La notion d'asymptotique de Gevrey a été motivée par l'observation que le terme général des séries divergentes qu'on rencontre le plus souvent se comportait souvent comme  $CA^n(n!)^{1/k}$  pour certaines constantes  $C$ ,  $A$  et  $k > 0$ , lorsque  $n$  est assez grand. Cela a conduit Watson à classer les séries entières selon un indice dit de Gevrey.

**Définition 2.3.1.** Soient  $k > 0$  et  $\hat{u}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n \in \mathbb{C}[[t]]$ . On dit que  $\hat{u}$  est une série de Gevrey d'indice  $k$  si, il existe deux constantes  $C > 0$ , et  $A > 0$  telles que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$|u_n| \leq CA^n(n!)^{1/k}. \quad (2.29)$$

◆

On note  $\mathbb{C}[[t]]_{1/k}$  l'ensemble des séries de Gevrey d'indice  $k$ .

Les classes Gevrey s'emboîtent, dans le sens où si  $0 < k' < k$ , alors

$$\mathbb{C}[[t]]_{1/k} \subset \mathbb{C}[[t]]_{1/k'}.$$

Et pour  $k$  infini,  $\mathbb{C}[[t]]_0$  est l'ensemble des séries convergentes,

$$\mathbb{C}[[t]]_0 = \mathbb{C}\{t\}.$$

On dira qu'une série  $\hat{u}$  est de Gevrey d'indice exactement  $k$  si  $\hat{u}$  est de Gevrey d'indice  $k$  et que  $\hat{u}$  n'est de Gevrey d'indice  $k'$  pour aucun  $k' > k$ . Autrement dit,  $\hat{u}$  est de Gevrey d'ordre exactement  $k$  si

$$k = \max_{k'} \{ \hat{u} \in \mathbb{C}[[t]]_{1/k'} \}.$$

Le théorème suivant assure que toute solution formelle d'une équation différentielle est de Gevrey d'un certain indice [Mai03].

**Théorème 2.3.2** (Théorème de Maillet). Si  $\hat{u} \in \mathbb{C}[[t]]$  est une solution série formelle d'une équation différentielle

$$G(t, u, u', \dots, u^{(n)}) = 0$$

où  $G$  est une fonction analytique alors il existe  $k > 0$  tel que la solution formelle  $\hat{u}$  soit une série de Gevrey d'indice  $k$ . ★

Voici alors la définition de l'asymptotique de Gevrey.

**Définition 2.3.3.** (*Asymptotique de Gevrey.*) Soient  $k > 0$ ,  $V = S(d, \Theta, \rho)$  un secteur ouvert du plan complexe  $\mathbb{C}$  ou de la surface de Riemann du logarithme,  $u$  une fonction holomorphe sur  $V$  et  $\hat{u}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n \in \mathbb{C}[[t]]$ . On dit que  $u$  est asymptotique Gevrey d'indice  $k$  à  $\hat{u}$  dans  $V$  et on note :

$$u(t) \sim_V^{1/k} \hat{u}(t)$$

si pour tout sous-secteur compact  $W$  de  $V \cup \{0\}$ , et tout  $N \in \mathbb{N}$ , il existe deux constantes  $C$  et  $A$  telles que

$$\left| u(t) - \sum_{n=0}^{N-1} u_n t^n \right| \leq C A^N (N!)^{1/k} |t|^N, \quad \forall t \in W \quad (2.30)$$

◆

Si  $u$  est asymptotique Gevrey d'indice  $k$  à  $\hat{u}$ , on dira que  $\hat{u}$  est le *développement (asymptotique) Gevrey d'indice  $k$*  de  $u$ .

Par exemple, la série d'Euler (2.27) est le développement asymptotique de Gevrey d'indice 1 de la fonction  $E$  définie en (2.28). En effet, on a trouvé dans l'exemple 2.2.5 que

$$\left| E(t) - \sum_{n=1}^{N-1} (-1)^{n-1} (n-1)! t^n \right| \leq \frac{1}{(\sin \delta)^N} (N-1)! |t|^N$$

Notons que, s'il existe, le développement Gevrey  $\hat{u}$  d'indice  $k$  d'une fonction est unique et que  $\hat{u} \in \mathbb{C}[[t]]_{1/k}$  comme il est annoncé dans la propriété suivante.

**Propriétés 2.3.4.** Si  $\hat{u}$  est le développment asymptotique d'indice  $k$  d'une fonction  $u$  alors  $\hat{u} \in \mathbb{C}[[t]]_{1/k}$ .

PREUVE. Il suffit d'utiliser la relation (2.23) qui définit les termes de la série et la définition de l'asymptotique de Gevrey donnée par (2.30) ■



On peut donc définir l'homomorphisme d'algèbres différentielles

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_k : A_k(V) &\longrightarrow \mathbb{C}[[t]]_{1/k} \\ u &\longmapsto \mathcal{J}_k(u) = \hat{u} \quad \text{tel que} \quad u(t) \sim_V^{1/k} \hat{u}(t) \end{aligned} \quad (2.31)$$

où  $A_k(V)$  est l'ensemble des fonctions analytiques dans  $V$ , ayant un développement Gevrey d'indice  $k$  dans  $V$ .

Voyons maintenant la différence avec l'asymptotique de Poincaré. En fait, dans des petits secteurs, la situation est identique.

**Théorème 2.3.5.** *Soit  $\hat{u}(t) \in \mathbb{C}[[t]]_{1/k}$  et un secteur  $V$  d'ouverture  $< \pi/k$ . Alors il existe une fonction  $u(t)$ , analytique dans  $V$ , telle que*

$$u(t) \sim_V^{1/k} \hat{u}(t)$$

★

Cela veut dire que, comme dans le cas de l'asymptotique de Poincaré,  $\mathcal{J}_k$  est surjectif pour des secteurs de petite ouverture. De même  $\mathcal{J}_k$  n'est pas injectif. Son noyau est engendré par les fonctions du type  $e^{-a/t^{1/k}}$ ,  $a > 0$ . On a toutefois plus de précision sur les fonctions d'incertitude ( $\text{Ker } \mathcal{J}_k \subset \text{Ker } \mathcal{J}$ ). Comme dans le cas de l'asymptotique de Poincaré, Ramis et Sibuya [JPY89] montre aussi que toute série solution est le développement Gevrey d'une vraie fonction :

**Théorème 2.3.6** (Théorème fondamental des développements asymptotiques Gevrey). *Soit  $G(x, Y, \dots, Y_n)$  une fonction analytique de  $n + 2$  variables et  $\hat{u} \in \mathbb{C}[[t]]_{\frac{1}{k}}$  une solution série formelle Gevrey d'indice  $1/k$  de l'équation différentielle*

$$G(t, y, \dots, y^{(n)}) = 0$$

*Alors, il existe un nombre réel  $k' > 0$  de telle sorte que pour chaque secteur ouvert  $V = S(d, \Theta, \rho)$ ,  $\Theta < \inf(\pi/k, \pi/k')$  et  $\rho \ll 1$ , il existe une fonction  $u$*

*solution de l'équation différentielle qui admet  $\hat{u}$  comme développement asymptotique Gevrey d'indice  $k$  dans  $V$ .* ★

En revanche, dans les secteurs de grande ouverture, la situation est totalement différente. En effet, dans de tels secteurs,  $\mathcal{J}_k$  devient injectif [Wat12a, Nev18] :

**Théorème 2.3.7.** *Soit  $\hat{u}(t) \in \mathbb{C}[[t]]_{1/k}$  et un secteur  $V$  d'ouverture  $> \pi/k$ . Alors s'il existe une fonction  $u(t)$ , analytique dans  $V$ , telle que*

$$u(t) \sim_V^{1/k} \hat{u}(t),$$

*cette fonction est unique.* ★

On perd par contre la surjectivité de  $\mathcal{J}_k$ . Ainsi, dans des grands secteurs, une série ne peut incarner au plus qu'une fonction holomorphe. Notons qu'une version de la preuve de ce théorème (2.3.7) repose sur le principe de Phragmén–Lindelöf.

**Exemple 2.3.8.** Revenons à l'équation d'Euler (2.26). On a vu que dans le secteur  $\{t, \operatorname{Re}(t) > 0\}$  qui est d'ouverture  $\pi$ , on a une infinité de fonctions dont le développement asymptotique est (2.27). Parmi elles, on peut montrer que seule la solution  $E(t)$  est asymptotique à la série dans un secteur d'ouverture supérieure à  $\pi$ . On peut montrer que ce secteur est  $S(\mathbb{R}^+, 3\pi)$  (dans la surface de Riemann du logarithme). □

Les séries  $\hat{u}$  telles qu'il existe une fonction  $u$  vérifiant  $u(t) \sim_V^{1/k} \hat{u}(t)$  dans un secteur  $V = S(d, \Theta, \rho)$  d'ouverture  $\Theta > \pi/k$  sont dites *k-sommables*, de *k-somme*  $u$ , dans la direction  $d$ . On reviendra sur la définition de la sommabilité ainsi que sur le calcul effectif de la somme, avec un point de vue différent mais équivalent, dans les sections qui suivront. Mais pour finir cette section, on va donner la justification de la sommation au plus petit terme.

**Proposition 2.3.9.** *Soit  $\hat{u} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n$  une série Gevrey d'indice  $k$ ,  $s = 1/k$ , et  $A$  et  $C$  deux constantes telles que :*

$$|u_n| \leq C A^n (n!)^{1/k}$$

*pour  $n$  assez grand. Alors, pour  $t$  fixé et  $N$  égal à la partie entière de  $\frac{1}{A^s t^s}$ , on a :*

$$\left| f(t) - \sum_{p=0}^{N-1} u_p t^p \right| \leq C \sqrt[2s]{2\pi N} e^{-\left| \frac{1}{s A^s t^s} \right|}. \quad (2.32)$$

L'idée de la preuve consiste à utiliser la majoration des séries Gevrey (2.30) et la formule de Stirling. Ce résultat affirme que la somme partielle donne une approximation exponentiellement précise jusqu'à un temps fixé  $t$ , à condition de s'arrêter au terme  $N \simeq \frac{1}{A^s t^s}$ .

Bien qu'ayant donné des résultats satisfaisants aux problèmes des astronomes, la sommation au plus petit terme n'est pas toujours très efficace pour l'étude de problèmes d'évolution. En effet, on souhaite généralement calculer la solution pour des temps grands. La valeur optimale de la coupure  $N$  pourrait alors être 0 (l'approximation est une constante) !

## 2.4 Resommation de Borel-Laplace

Dans cette section, on présente la méthode de resommation de Borel-Laplace pour les séries Gevrey d'indice  $k = 1$ . Comme on l'a vu dans la section introductive 2.1, la méthode se base sur la transformation de Borel et la transformation de Laplace. On va rappeler (et généraliser) ces transformations.

**Définition 2.4.1.** *On appelle transformée de Borel d'une série  $\hat{u}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n \in$*

$\mathbb{C}[[t]]$  la série

$$\hat{\mathcal{B}}\hat{u}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_{n+1}}{n!} \xi^n \in \mathbb{C}[[\xi]]. \quad (2.33)$$

◆

La transformée de Borel d'une série de Gevrey d'indice 1 est une série convergente :

$$\hat{\mathcal{B}}(\mathbb{C}[[t]]_1) = \mathbb{C}\{\xi\}.$$

Pour introduire la transformation de Laplace, on a besoin de définir la notion de croissance au plus exponentielle à l'infini.

**Définition 2.4.2.** Soient  $d$  une demi-droite d'origine  $O$  et  $P$  une fonction analytique dans un secteur infini  $V = S(d, \Theta)$ .  $P$  est dite à croissance au plus exponentielle à l'infini dans la direction  $d$  s'il existe des constantes  $C$  et  $T$  telles que

$$|P(\xi)| \leq Ce^{|\xi|/T} \quad (2.34)$$

lorsque  $\xi \in V$  et  $|\xi|$  est assez grand.

◆

La définition de la transformée de Laplace est alors la suivante.

**Définition 2.4.3.** Soient  $d$  une demi-droite d'origine  $O$  et  $P$  une fonction analytique dans un secteur infini  $V = S(d, \Theta)$ , intégrable au voisinage de zéro et de croissance au plus exponentielle à l'infini dans la direction  $d$ . Alors la transformée de Laplace de  $P$  dans la direction  $d$  est la fonction :

$$\mathcal{L}_d P(t) = \int_d P(\xi) e^{-\xi/t} d\xi, \quad (2.35)$$

◆

Dans les conditions de la définition 2.4.2, la fonction  $\mathcal{L}_d P(t)$  est holomorphe dans un disque ouvert, appelé *disque de Borel*, de direction  $d$  et de diamètre  $T$  passant par zéro, qu'on notera  $D_{dT}$ ,  $T$  étant la constante intervenant dans (2.34).

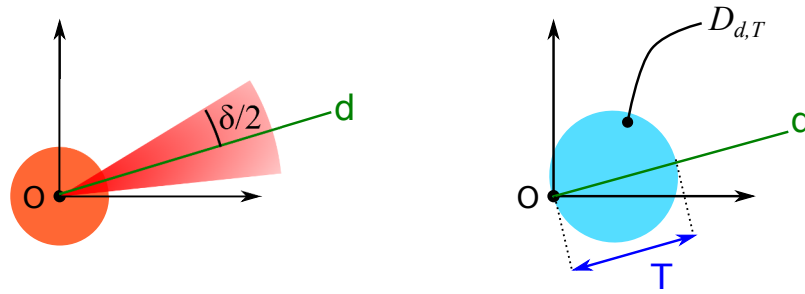


FIGURE 2.2 – A gauche : domaine d’analyticité de  $P$ . A droite : disque de Borel de  $\mathcal{L}_d P$ .

La FIGURE 2.2, à gauche, illustre le domaine d’analyticité minimal que la fonction  $P$  doit avoir pour posséder une transformée de Laplace.   droite de la même figure est représenté le domaine d’analyticité de  $\mathcal{L}_d P$ .

On va maintenant donner la définition d’une série 1-sommable.

**Définition 2.4.4.** Soient  $\hat{u} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n \in \mathbb{C}[[t]]$  et  $d$  une demi-droite issue de l’origine. La série  $\hat{u}$  est sommable (ou 1-sommable) dans la direction  $d$  si

- $\hat{u}$  est de Gevrey d’indice 1,
- $\hat{B}\hat{u}$  est, analytiquement prolongeable en une fonction  $P$  dans un secteur infini  $S(d, \delta)$  contenant  $d$
- et  $P$  est de croissance au plus exponentielle à l’infini.

Dans ce cas,  $\mathcal{S}_d \hat{u}(t) = u_0 + \mathcal{L}_d P(t)$  est appelée somme (ou 1-somme) de Borel de  $\hat{u}$ . ◆

On a la propriété suivante qui affirme que la série est le développement asymptotique de Gevrey d’indice 1 de sa somme de Borel.

**Théorème 2.4.5.** Si  $\hat{u}$  est sommable, de somme de Borel  $\mathcal{S}_d \hat{u}(t)$  dans la direction  $d$ , alors on peut trouver un secteur  $V$  d’ouverture  $> \pi/k$ , bissecté par  $d$  tel

que

$$\mathcal{S}_d \hat{u}(t) \sim_V^1 \hat{u}(t).$$

★

On a en fait une équivalence et non une simple implication dans ce théorème. Le secteur  $V$  contient la réunion

$$\bigcup_{d' \subset S(d, \delta)} D_{d', T}$$

des disques de Borel  $D_{d', T}$  pour toutes les directions  $d'$  contenues dans  $S(d, \delta)$ . La FIGURE 2.3, à droite, montre la réunion des deux disques extrêmes.

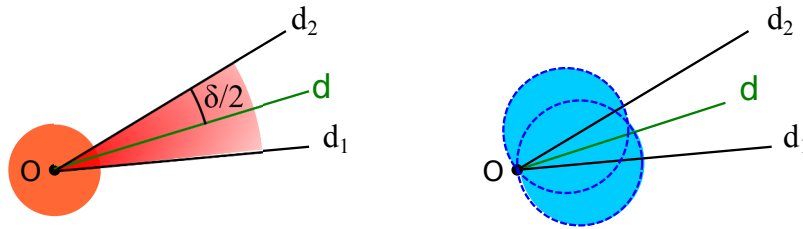


FIGURE 2.3 – A gauche : domaine d’analyticité  $S(d, \delta)$  de  $P$ . A droite : domaine d’analyticité de  $\mathcal{S}_d \hat{u}(t)$

Trouver la somme dans une direction  $d$  d’une série sommable  $\hat{u}$  consiste donc à

- Calculer sa transformée de Borel  $\hat{\mathcal{B}}\hat{u}(\xi)$ ,
- Prolonger analytiquement  $\hat{\mathcal{B}}\hat{u}(\xi)$  dans un domaine contenant  $d$  en une fonction  $P$ ,
- Calculer la transformée de Laplace  $\mathcal{L}_d P(t)$  de ce prolongement.

Ces trois étapes sont schématisées dans la TABLE 2.1.

**Remarque 2.4.6.** Lorsque  $d = \mathbb{R}^+$ , on notera simplement  $\mathcal{S}\hat{u}(t)$  la somme de Borel (d’indice 1) dans la direction  $d$ .

Appliquons ces trois étapes à la série d’Euler.

$$\begin{array}{ccc}
\hat{u}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n & \sim_{\mathbf{V}}^1 & \mathcal{S}_d \hat{u}(t) = u_0 + \int_d P(\xi) e^{-\xi/t} d\xi \\
\text{Borel} \downarrow & & \uparrow \text{Laplace} \\
\mathcal{B}\hat{u}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_{n+1}}{n!} \xi^n & \xrightarrow{\text{Prolongation}} & P(\xi)
\end{array}$$

TABLE 2.1 – Schéma de la méthode de resommation Borel-Laplace

**Exemple 2.4.7.** Reconsidérons la série d'Euler

$$\hat{u}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (n-1)! t^n \quad (2.36)$$

qui est solution formelle de l'équation (2.26). Sa transformée de Borel est

$$\hat{\mathcal{B}}\hat{u}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \xi^n.$$

Cette série, de rayon de convergence 1, se prolonge naturellement en la fonction

$$P(\xi) = \frac{1}{1+\xi}.$$

Sa transformée de Laplace dans la direction  $\mathbb{R}^+$  est

$$\mathcal{L}_{\mathbb{R}^+} \hat{u}(t) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\xi/t}}{1+\xi} d\xi = E(t).$$

On est donc parti d'une série initiale divergente, et grâce à la resommation, on a obtenu une unique fonction, analytique dans le demi-plan complexe  $\{Re(t) > 0\}$ , et qui est solution de l'équation (2.26).  $\square$

Dans la pratique, les séries qu'on rencontrera peuvent avoir un rayon de convergence (théorique ou numérique) non nul. Ainsi, il est intéressant de voir ce que donne le procédé de resommation sur une série convergente. Pour cela, on va prendre un exemple.

**Exemple 2.4.8.** Considérons l'équation quadratique

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + u^2 = 0, & t > 0 \\ u(0) = 1. \end{cases} \quad (2.37)$$

La solution formelle est :

$$\hat{u} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n. \quad (2.38)$$

Cette série est convergente dans le disque unité. Sa transformée de Borel est :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \xi^n. \quad (2.39)$$

La série (2.39) est le développement de Taylor de la fonction

$$\xi \mapsto -e^{-\xi}. \quad (2.40)$$

Cette fonction est le prolongement naturel de 2.39. En appliquant la transformée de Laplace, on trouve la solution exacte

$$1 - \int_0^{+\infty} e^{-\xi} e^{-\xi/t} \xi = \frac{1}{1+t}. \quad (2.41)$$

qui est valide dans  $\mathbb{C} - \{-1\}$ . □

Ainsi, la méthode de resommation de Borel-Laplace prolonge le domaine de validité de la série initiale. Si cette dernière possède un rayon de convergence nul (mais est sommable), alors la resommation donne une solution analytique dans un domaine non vide. Et si la série initiale a déjà un rayon de convergence non nul, la resommation en étend le domaine de validité.

Dans la section suivante, on étend la resommation de Borel-Laplace au cas d'indice Gevrey quelconque  $k$ . Les définitions seront similaires à celles qu'on a données précédemment.



## 2.5 Resommation d'indice Gevrey $k$

Rappelons qu'une série est de Gevrey d'indice  $k$  si son terme général est majoré par

$$|u_n| \leq CA^n(n!)^{1/k}$$

pour certaines constantes  $C$  et  $A$ .

**Exemple 2.5.1.** La série de Leroy

$$\hat{u}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! t^{2n+2} \quad (2.42)$$

est de Gevrey d'indice  $k = 2$ . Elle est liée à la série d'Euler par le changement de variable  $t \mapsto t^{1/k} = t^{1/2}$ . Elle est solution de l'équation

$$t^3 \frac{du}{dt} + 2u = 2t^2. \quad (2.43)$$

□

**Définition 2.5.2.** On appelle transformée de Borel d'indice  $k$  d'une série  $\hat{u}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n \in \mathbb{C}[[t]]$  la série

$$\hat{\mathcal{B}}_k \hat{u}(\xi) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{u_n}{\Gamma(n/k)} \xi^{n-k} \in \mathbb{C}[[\xi]]. \quad (2.44)$$

◆

La transformée de Borel d'indice  $k$  d'une série de Gevrey d'indice  $k$  est une série convergente :

$$\hat{\mathcal{B}}_k(\mathbb{C}[[t]]_{1/k}) = \mathbb{C}\{\xi\}.$$

**Définition 2.5.3.** Soient  $d$  une demi-droite issue de l'origine et  $P$  une fonction analytique dans un secteur infini  $V = S(d, \Theta)$ .  $P$  est dite à croissance au plus exponentielle d'indice  $k$  à l'infini dans la direction  $d$  s'il existe des constantes  $C$

et  $T$  telles que

$$|P(\xi)| \leq Ce^{|\xi|^k/T} \quad (2.45)$$

lorsque  $\xi \in V$  et  $|\xi|$  est assez grand.  $\blacklozenge$

**Définition 2.5.4.** Soient  $d$  une demi-droite d'origine  $O$  et  $P$  une fonction analytique dans un secteur infini  $V = S(d, \Theta)$ , intégrable au voisinage de zéro et de croissance au plus exponentielle d'indice  $k$  à l'infini dans la direction  $d$ . Alors la transformée de Laplace d'indice  $k$  de  $P$  dans la direction  $d$  est la fonction :

$$\mathcal{L}_{k,d}P(t) = k \int_d P(\xi) \xi^{k-1} e^{-\xi^k/t^k} d\xi. \quad (2.46)$$

$\blacklozenge$

**Définition 2.5.5.** Soient  $\hat{u} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n \in \mathbb{C}[[t]]$  et  $d$  une demi-droite issue de l'origine. On dit que la série  $\hat{u}$  est  $k$ -sommable dans la direction  $d$  si

- $\hat{u}$  est de Gevrey d'indice  $k$ ,
- $\hat{\mathcal{B}}_k \hat{u}$  est, analytiquement prolongeable en une fonction  $P$  dans un secteur infini  $S(d, \delta)$  contenant  $d$
- et  $P$  est de croissance au plus exponentielle d'indice  $k$  à l'infini.

Dans ce cas,

$$\mathcal{S}_{k,d}\hat{u}(t) = \sum_{n=0}^k u_n t^n + \mathcal{L}_{k,d}P(t)$$

est appelée  $k$ -somme de Borel de  $\hat{u}$ .  $\blacklozenge$

Comme pour  $k = 1$ , on a :

**Propriétés 2.5.6.** Si  $\hat{u}$  est  $k$ -sommable, de  $k$ -somme de Borel  $\mathcal{S}_{k,d}\hat{u}(t)$  dans la direction  $d$ , alors on peut trouver un secteur  $V$  d'ouverture supérieure à  $\pi/k$ , bissecté par  $d$  tel que

$$\mathcal{S}_{k,d}\hat{u}(t) \sim_V^{1/k} \hat{u}(t).$$

On peut généraliser tous les résultats de la section précédente ( $k = 1$ ). En fait, on peut toujours se ramener au cas  $k = 1$  par l'opérateur de ramification

$$t \mapsto t^{1/k}.$$

Grâce à ce changement de variable, on peut donc se contenter du procédé de resommation décrit dans le TABLE 2.1 dans le pratique.

On dira qu'une série est  $k$ -sommable, sans mention de la direction, lorsqu'elle est  $k$ -sommable dans presque toutes les directions, c-à-d

**Définition 2.5.7.** *Une série est  $k$ -sommable si elle est  $k$ -sommable dans toutes les directions, sauf un nombre fini. On note*

$$\mathbb{C}\{t\}_{1/k}$$

*l'ensemble des séries  $k$ -sommables.*



Notons que pour  $k$  et  $k'$  différents, la  $k$ -sommabilité et la  $k'$ -sommabilité ne sont pas comparables, dans le sens où seules les séries convergentes sont en même temps  $k$  et  $k'$  sommables  $\mathbb{C}\{t\}_{1/k}$ .

**Théorème 2.5.8** (Théorème Taubérien). *Si  $k$  et  $k'$  sont deux réels strictement positifs distincts alors*

$$\mathbb{C}\{t\}_{1/k} \cap \mathbb{C}\{t\}_{1/k'} = \mathbb{C}\{t\}.$$



Cela est dû au fait que si  $k < k'$  alors l'estimation asymptotique pour la  $k'$ -sommabilité est plus stricte ( $\mathbb{C}[[t]]_{1/k'} \subset \mathbb{C}\{t\}_{1/k}$ ) mais l'ouverture du secteur exigé est moins strict.

Pour calculer la somme d'une série divergente, il est nécessaire de connaître son indice Gevrey. Étant donnée une série, solution formelle d'une équation différentielle, la question est de savoir s'il existe un  $k$ -pour lequel la série est  $k$ -sommable et comment calculer ce  $k$ .

Dans le cas d'une série solution formelle d'une équation linéaire, et à coefficients polynomiaux, cet indice se déduit à partir du polygone de Newton de l'équation qu'on va aborder dans la section suivante.

## 2.6 Polygone de Newton

Considérons l'équation différentielle linéaire homogène, à coefficients polynomiaux

$$p_n(t) \frac{d^n u}{dt^n} + \cdots + p_1(t) \frac{du}{dt} + p_0(t)u = 0. \quad (2.47)$$

Pour chaque polynôme non nul  $p_i$ , on désigne par  $Q_i$  le deuxième quadrant de  $\mathbb{R}^2$  translaté en  $O_i = (i, v(i) - i)$  où  $v(i)$  est la valuation de  $p_i$  (voir FIGURE 2.4). Comme la valuation d'un polynôme nul est infini, on convient que  $Q_i = \emptyset$  si  $p_i \equiv 0$ .

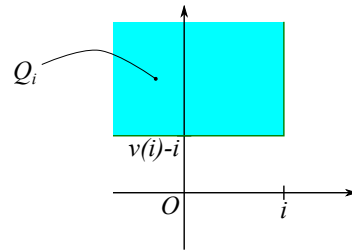


FIGURE 2.4 – Quadrant  $Q_i$

On appelle polygone de Newton de l'équation (2.47) l'enveloppe convexe de

$$\bigcup_{i=0}^n Q_i.$$

On a alors le théorème suivant qui lie l'indice Gevrey de la série solution formelle aux pentes du polygone de Newton.

**Théorème 2.6.1.** *Si  $\hat{u} \in \mathbb{C}[[t]]$  est solution formelle de (2.47) alors  $\hat{u}$  est convergente ou Gevrey d'indice exactement  $1/k$ ,  $k$  étant la plus petite pente parmi les pentes strictement positives du polygone de Newton de (2.47). ★*

**Exemple 2.6.2.** Pour tracer le polygone de Newton de l'équation d'Euler (2.26), il faut la transformer en une équation homogène. En divisant (2.26) par  $t$  puis en la dérivant, on obtient :

$$t^3 \frac{d^2 u}{dt^2} + (t^2 + t) \frac{du}{dt} - u = 0.$$

On a :  $O_0 = (0, 0)$ ,  $O_1 = (1, 0)$  et  $O_2 = (2, 1)$ . Le polygone de Newton est représenté sur la FIGURE 2.5. Sa seule pente non nulle est 1, qui correspond à l'indice Gevrey de la série solution formelle.

Pour l'équation de Leroy (2.43), l'équation homogène associée est

$$t^4 \frac{d^2 u}{dt^2} + (t^3 + 2t) \frac{du}{dt} - 4u = 0.$$

La FIGURE 2.5 montre que le polygone de Newton possède une pente  $k = 2$ , ce qui correspond bien à l'indice Gevrey de la série de Leroy (2.42).  $\square$

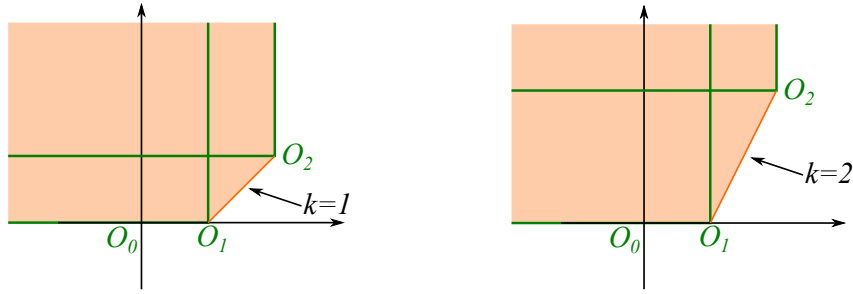


FIGURE 2.5 – Polygone de Newton de l'équation d'Euler (à gauche) et de l'équation de Leroy (à droite)

Prenons un autre exemple.

**Exemple 2.6.3.** Considérons l'équation

$$\begin{aligned} & t(1 - \alpha + \alpha t) [(1 - \alpha + \alpha t) - \gamma \lambda_2 (1 - \alpha + \alpha t)^2] u'' \\ & - (2 - 2\alpha + \alpha t) [(1 - \alpha + \alpha t) - \gamma \lambda_2 (1 - \alpha + \alpha t)^2] u' \\ & + t [\lambda_1 t^2 + \lambda_1 (1 - \alpha + \alpha t) - \gamma \lambda_2^2 (1 - \alpha + \alpha t)^2] u = 0 \end{aligned} \quad (2.48)$$

Associée aux conditions au bords

$$u(0) = 0, \quad u'(1) = \lambda_2 u(1),$$

cette équation intervient dans la modélisation de l'effondrement d'une poutre de forme conique [CACM10] sous l'effet d'une charge perpendiculaire.  $\alpha$  est un paramètre géométrique (la pente du cône),  $\gamma$  est lié au module d'Young.

On peut écrire l'équation 2.48 sous la forme

$$p_2(t)u'' + p_1(t)u' + p_0(t)u = 0$$

avec

$$\begin{aligned} p_2(t) = & -\alpha^3 \gamma \lambda_2 t^4 + \alpha^2 (1 - 3\gamma \lambda_2 + 3\gamma \lambda_2 \alpha) t^3 \\ & + \alpha (1 - \alpha) (3\gamma \lambda_2 \alpha - 3\gamma \lambda_2 + 2) t^2 + (1 - \alpha)^2 (1 - \gamma \lambda_2 + \gamma \lambda_2 \alpha) t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_1(t) = & -\alpha^3 \gamma \lambda_2 t^3 + \alpha^2 (-4\gamma \lambda_2 + 4\gamma \lambda_2 \alpha + 1) t^2 \\ & - \alpha (\alpha - 1) (5\gamma \lambda_2 \alpha - 5\gamma \lambda_2 + 3) t + 2(\alpha - 1)^2 (\gamma \lambda_2 \alpha + 1 - \gamma \lambda_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_0(t) = & (\lambda_1 - \gamma \lambda_2^2 \alpha^2) t^3 + \alpha (2\gamma \lambda_2^2 - 2\gamma \lambda_2 \alpha + \lambda_1) t^2 \\ & - (\alpha - 1) (\gamma \lambda_2^2 \alpha + \lambda_1 - \gamma \lambda_2^2) t. \end{aligned}$$

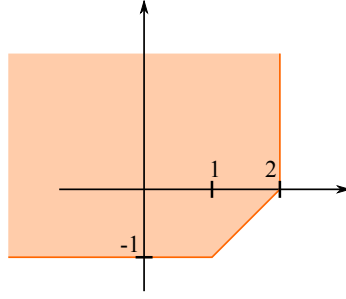
Le polygone de Newton ne possède une pente finie non nulle que lorsque

$$\alpha = \frac{\gamma \lambda_2 - 1}{\gamma \lambda_2} \quad \text{et} \quad \gamma \lambda_2 \neq 1. \quad (2.49)$$

Dans ce cas, le polygone de Newton possède une pente 1 (voir FIGURE 2.6). L'équation pourrait donc avoir une solution série formelle divergente, de Gevrey d'indice 1.

□

L'utilisation faite du polygone de Newton ici est très sommaire. En effet, le théorème 2.6.1 peut être généralisé à une classe plus large d'équations et de séries solutions

FIGURE 2.6 – *Polygone de Newton de l'équation 2.48*

formelles. Mais pour tirer avantage de cette généralisation, il faudrait introduire la notion de multisommabilité. La notion de multisommabilité est très importante dans la théorie de resommation de Borel-Laplace. On ne souhaite toutefois pas l'exposer ici car on ne l'utilisera pas dans les applications numériques.

Pour finir ce chapitre, on va présenter un outil efficace offert par la transformation de Borel. C'est la localisation de singularités.

## 2.7 Localisation de singularités par transformation de Borel

On a vu que la transformation de Borel transforme une série divergente (mais de Gevrey) en une série convergente. En quelque sorte, cette transformation éparpille donc les singularités situées à l'origine sur le disque de convergence de la transformée. De même, elle déplace les singularités dans le plan complexe vers l'infini. Ainsi, pour étudier les singularités en temps fini, Pólya [P629] propose d'étudier le comportement à l'infini de la transformée de Borel.

Le résultat obtenu par Pólya a récemment été traduit de manière algorithmique par Pauls et Frisch [PF07]. Ces derniers ont alors pu étudier les singularités de l'équation de Burgers. Gargano et ses collaborateurs [GSSC14] ont utilisé la même méthode pour localiser les singularités des équations de Navier-Stokes à haut nombre de Reynolds. On va donner ici l'idée globale.

Considérons la fonction

$$u(\tau) = \frac{1}{\tau - c}. \quad (2.50)$$

Elle a un pôle en  $\tau = c \in \mathbb{C}$ . Appelons  $\gamma$  l'opposé de l'argument de  $c$  :  $c = |c|e^{-i\gamma}$ . Le développement de Taylor de  $u(t)$  en 0, où  $t = 1/\tau$ , est

$$\hat{u}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c^n t^n.$$

La transformée de Borel est <sup>2</sup>

$$\hat{\mathcal{B}}\hat{u}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n \xi^n}{n!} = e^{c\xi} = U(\xi).$$

On va étudier  $U$  au voisinage de l'infini, dans chaque direction. Dans la direction  $d_\varphi = [0, e^{i\varphi}\infty]$ , on a :

$$U(re^{i\varphi}) = e^{|c|re^{i\varphi-\gamma}}.$$

Le module de  $U(re^{i\varphi})$  varie de manière exponentielle à un taux

$$h(\varphi) = |c| \cos(\varphi - \gamma),$$

dans la direction  $d_\varphi$  (voir FIGURE 2.7).

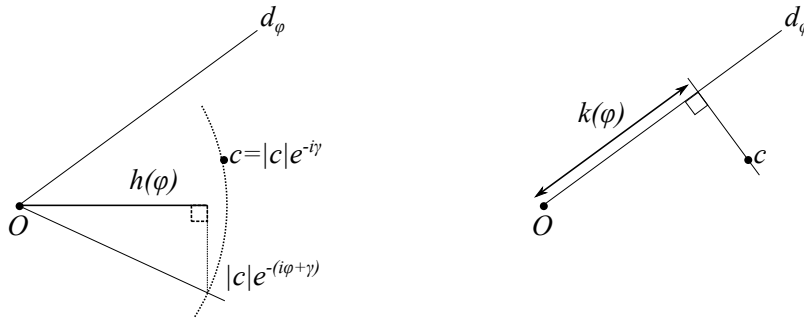


FIGURE 2.7 –  $h(\varphi)$  et  $k(\varphi)$

Par ailleurs, notons

$$k(\varphi) = \operatorname{Re}(ce^{-i\varphi}) = |c| \cos(\varphi + \gamma)$$

la distance entre l'origine  $O$  et la droite perpendiculaire à  $d_\varphi$  et passant par  $c$ . On peut observer que

$$h(\varphi) = k(-\varphi).$$

---

2. Le décalage d'indice dans la définition 2.4.1 a été enlevé pour simplifier



Essentiellement, le théorème de Pólya est une version plus élaborée de cette observation, dans le cas où  $u(\tau)$  possède un nombre fini de singularités, pas forcément du même type que (2.50) (on peut, par exemple, étudier des singularités du type  $e^{1/(\tau-c)}$ ). Le théorème dit également que si le développement de Taylor de  $u(\tau)$  est une série de rayon de convergence fini non nul, alors sa transformée de Borel est une fonction entière à croissance au plus exponentielle (dans toutes les directions). Dans cette version élaborée,

$$h(\varphi) = \limsup_{r \rightarrow \infty} r^{-1} \ln |U(re^{i\varphi})|$$

modélise le comportement à l'infini dans la direction  $\varphi$  de  $U$ . Il dépend entre autres du type de singularité. Quand à lui,  $k(\varphi)$  donne une indication de la position de la singularité de  $u(\tau)$ .

Paul et Frisch propose dans [PF07] un algorithme efficace pour approximer la fonction  $h(\varphi)$ . Grâce au théorème de Pólya, on connaît donc  $k(\varphi)$ . Cela permet de calculer le type et la position des singularités de  $u(\tau)$ .

Dans ce chapitre, on a donc donné les outils nécessaires pour comprendre et calculer la somme de Borel d'une série sommable. Comme on a dit, la théorie qui a été exposée n'est pas complète, mais suffisante pour introduire l'algorithme de resommation numérique, qu'on va aborder dans le chapitre suivant.

## Chapitre 3

# Algorithme Borel-Padé-Laplace et application aux EDO

Hamdouni et Razafindralandy [Raz05, RHA08, RH13] ont été les premiers à adapter la resommation de Borel-Laplace à la résolution numérique d'équations différentielles et équations aux dérivées partielles. Ils ont, pour cela, utilisé l'algorithme Borel-Padé-Laplace pour la resommation numérique. Cela leur a permis d'approximer la solution exacte dans un certain intervalle de temps. Ils ont ensuite appliqué une méthode de continuation pour atteindre des valeurs plus élevées du temps. Faisant ainsi, ils ont construit un schéma d'intégration temporelle d'équations différentielles d'évolution.

Dans la section suivante, on présente l'algorithme Borel-Padé-Laplace et le schéma d'intégration développé dans [Raz05, RHA08, RH13]. Des applications à des équations aux dérivées ordinaires seront données dans les sections suivantes.

### 3.1 L'algorithme Borel-Padé-Laplace

Rappelons que la resommation de Borel-Laplace dans une direction  $d$  d'une série  $\hat{u}$  consiste à (voir aussi la TABLE 2.1) :

- a) Calculer sa transformée de Borel  $\hat{\mathcal{B}}\hat{u}(\xi)$ ,
- b) Prolonger analytiquement  $\hat{\mathcal{B}}\hat{u}(\xi)$  dans un domaine contenant  $d$  en une fonction  $P$ ,

c) Calculer la transformée de Laplace  $\mathcal{L}_d P(t)$  de ce prolongement.

Numériquement, les termes de la série  $\hat{u}$  sont connus jusqu'à un ordre arbitraire  $N$ . Autrement dit,  $\hat{u}(t)$  sera représenté par la série tronquée (polynôme) :

$$\hat{u}^N(t) = \sum_{n=0}^N u_n t^n. \quad (3.1)$$

La transformation de Borel est connue jusqu'à l'ordre  $N - 1$  :

$$\hat{\mathcal{B}}\hat{u}^N(\xi) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{u_{n+1} \xi^n}{n!}. \quad (3.2)$$

Dans l'algorithme Borel-Padé-Laplace, le prolongement de  $\hat{\mathcal{B}}\hat{u}^N$  est réalisé par les approximants de Padé. Enfin, la transformée de Laplace peut être calculée par différentes méthodes. Ici, on a choisi la quadrature de Gauss-Laguerre.

Un rappel sur les approximants de Padé est donné dans la sous-section 3.1.1. De même, la méthode de quadrature de Gauss-Laguerre sera exposée dans la sous-section 3.1.2. Notons qu'on ne présentera qu'un algorithme correspondant à la somme dans la direction  $d = \mathbb{R}^+$  et à l'indice Gevrey 1 car, comme on l'a mentionné, on peut toujours se ramener à ce cas grâce à une ramification.

### 3.1.1 Approximants de Padé

Les approximants de Padé consiste à représenter une fonction, déterminée par son développement de Taylor tronqué, par une fraction rationnelle [Pad92, Gil78, Bre80, BJGM96]. Cette méthode peut être considérée comme une accélération de la convergence si on ne souhaite évaluer la fonction que dans le disque de convergence du développement de Taylor. Elle peut aussi être considérée comme un prolongement si on souhaite étendre la fonction hors du disque de convergence.

Soit  $v(\xi)$  une fonction holomorphe au voisinage de l'origine, dont on connaît le développement de Taylor jusqu'à l'ordre  $\mathfrak{m}$  :

$$v^{\mathfrak{m}}(\xi) = \sum_{n=0}^{\mathfrak{m}} v_n \xi^n. \quad (3.3)$$

La méthode des approximants de Padé consiste à représenter  $v^{\mathbf{m}}(\xi)$  par une fraction rationnelle

$$[\mathbf{q}/\mathbf{r}](\xi) = \frac{Q(\xi)}{R(\xi)},$$

où  $P$  et  $Q$  sont des polynômes de degrés respectifs  $\mathbf{q}$  et  $\mathbf{r} = \mathbf{m} - \mathbf{q}$ , tel que le développement de Taylor de  $[\mathbf{p}/\mathbf{q}]$  coïncide avec celui de  $v$  jusqu'à l'ordre  $\mathbf{m}$  :

$$v(\xi) - \frac{Q(\xi)}{R(\xi)} = O(\xi^{\mathbf{m}+1}). \quad (3.4)$$

Les coefficients  $q_i$  de  $Q$  et les coefficients  $r_i$  de  $R$  vérifient donc l'équation :

$$(v_0 + v_1\xi + \cdots + v_{\mathbf{m}}\xi^{\mathbf{m}})(r_0 + r_1\xi + \cdots + r_{\mathbf{r}}\xi^{\mathbf{r}}) - (q_0 + q_1\xi + \cdots + q_{\mathbf{q}}\xi^{\mathbf{q}}) = O(\xi^{\mathbf{m}+1}). \quad (3.5)$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que  $r_0 = 1$ . Supposons que  $\mathbf{q} \leq \mathbf{r}$ . Pour déterminer les coefficients du dénominateur  $R$ , il faut résoudre l'équation linéaire

$$\begin{pmatrix} v_{\mathbf{q}} & \cdots & v_{\mathbf{q}-\mathbf{r}+1} \\ v_{\mathbf{q}+1} & \cdots & v_{\mathbf{q}-\mathbf{r}+2} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{\mathbf{q}+\mathbf{r}-1} & \cdots & v_{\mathbf{q}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{\mathbf{r}} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} v_{\mathbf{q}+1} \\ v_{\mathbf{q}+2} \\ \vdots \\ v_{\mathbf{q}+\mathbf{r}} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Les coefficients du numérateur  $Q$  s'obtiennent par un simple produit matrice-vecteur :

$$\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_{\mathbf{r}} \\ \vdots \\ q_{\mathbf{q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 & 0 & \cdots & 0 \\ v_1 & v_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{\mathbf{r}} & v_{\mathbf{r}-1} & \cdots & v_0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{\mathbf{q}} & v_{\mathbf{q}-1} & \cdots & v_{\mathbf{q}-\mathbf{r}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ r_1 \\ \vdots \\ r_{\mathbf{r}} \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Si  $\mathbf{q} > \mathbf{r}$ , il faut adapter légèrement les équations (3.6) et (3.7).

Les approximations de Padé sont très populaires car elles sont généralement efficaces. Plusieurs problèmes peuvent toutefois se poser lors de la résolution du système

(3.6). En effet, la matrice de système peut ne pas être inversible. C'est par exemple le cas lorsqu'on a un facteur commun entre les polynômes  $Q$  et  $R$ . Et même lorsque la matrice est inversible, le problème peut être mal conditionné. Deux solutions s'offrent à nous pour contourner ces problèmes. Le premier consiste à réduire le système en utilisant une décomposition SVD [GGT13]. La deuxième exploite les matrices Toeplitz [AI11]. On regardera plus en détail les problèmes liés aux approximants de Padé dans le chapitre 6.

Sauf mention contraire, on choisira les Padé diagonaux, ou presque diagonaux selon la parité de  $\mathbf{m}$  dans les applications numériques. C'est-à-dire qu'on choisira  $\mathbf{q}$  et  $\mathbf{r}$  tels que

$$\mathbf{q} = \mathbf{r} = \mathbf{m}/2 \quad \text{ou} \quad \mathbf{q} = \mathbf{r} + 1 = (\mathbf{m} + 1)/2$$

selon la parité de  $\mathbf{m}$ . Ce choix est le plus populaire lorsqu'on n'a pas d'information sur la fonction à approximer  $v$ . Il est supporté par quelques théorèmes et des conjectures à partir des expériences (voir [BJGW61, Sta97, Lub14]).

Dans l'algorithme Borel-Padé-Laplace, on applique l'approximation de Padé sur  $\hat{\mathcal{B}}\hat{u}^N(\xi)$  pour prolonger  $\hat{\mathcal{B}}\hat{u}(\xi)$  dans un secteur contenant la direction  $d = \mathbb{R}^+$ . On notera

$$P^N(\xi) = \frac{q_0 + q_1\xi + \cdots + q_{\mathbf{q}}\xi^{\mathbf{q}}}{r_0 + r_1\xi + \cdots + r_{\mathbf{r}}\xi^{\mathbf{r}}}$$

l'approximant  $[\mathbf{q}/\mathbf{r}](\xi)$ .

Il est en fait également envisageable de l'appliquer directement sur  $u^N(t)$ . Il n'y a toutefois pas de résultat qui affirmerait que les approximants convergeront lorsque  $N \rightarrow \infty$ . Et même si ceux-ci convergent, il n'y a pas de raison pour que la limite soit la somme de Borel  $\mathcal{S}u(t)$  car les approximants de Padé sont définis dans le cadre de l'asymptotique de Poincaré.

Notons que lorsque la taille du problème est élevée (par exemple lorsqu'on résout une EDP discrétisée), il peut être intéressant de considérer une version vectorielle ou matricielle des approximants de Padé [VI87, GMR97, XB90].

### 3.1.2 Quadrature de Gauss-Laguerre

La méthode de quadrature de Gauss-Laguerre consiste à approximer une intégrale semi-infinie du type

$$\int_0^\infty f(\xi) e^{-\xi} d\xi \quad (3.8)$$

par une somme

$$\sum_{i=1}^{N_G} f(\xi_i) \omega_i. \quad (3.9)$$

Les  $\xi_i$  sont les racines des  $N_G$  premiers polynômes de Laguerre. Les  $\omega_i$  sont les poids associés, choisis de tel sorte que la quadrature (3.9) soit exacte si  $f(\xi)$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à  $2N_G - 1$ . Pour toute autre fonction  $f$ , dérivable  $2N_G$  fois, l'erreur d'approximation est

$$\int_0^\infty f(\xi) e^{-\xi} d\xi - \sum_{i=1}^{N_G} f(\xi_i) \omega_i = \frac{f^{(2N_G)}(\xi)}{(2N_G)!} \langle p_{N_G}, p_{N_G} \rangle. \quad (3.10)$$

pour un certain  $\xi > 0$ .  $p_n$  est le  $n^{\text{ième}}$  polynôme de Laguerre avec terme dominant 1, et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le produit scalaire avec poids

$$\langle g, h \rangle = \int_0^\infty g(\xi) h(\xi) e^{-\xi} d\xi.$$

Pour approximer la transformée de Laplace d'une fonction  $P(\xi)$  dans la direction  $d = \mathbb{R}^+$ , on peut utiliser la relation

$$P(\xi) e^{-\xi/t} = \left( P(\xi) e^{-\xi/t} e^{\xi} \right) e^{-\xi}.$$

Cela conduit à la formule :

$$\mathcal{L}_d P(t) \simeq \sum_{i=1}^{N_G} P(\xi_i) e^{-\xi_i(\frac{1}{t}-1)} \omega_i. \quad (3.11)$$

Cette formule peut poser un problème si on a besoin d'évaluer la transformée pour des très petites valeurs de  $t$ .

Pour éviter ce problème, on peut considérer le changement de variables  $\xi \mapsto \xi/t$ . Cela conduit à la formule suivante :

$$\mathcal{L}_d P(t) \simeq t \sum_{i=1}^{N_G} P(\xi_i t) \omega_i. \quad (3.12)$$

L'algorithme Borel-Padé-Laplace (BPL) est résumé dans la TABLE 3.1 où  $P'^N$  est lié à  $P^N$  par l'une des formules (3.11) et (3.12).

$$\begin{array}{ccc}
 \hat{u}^N(t) = \sum_{n=0}^N u_n t^n & & \mathcal{S}^N(t) = u_0 + \sum_{i=1}^{N_G} P'^N(\xi_i, t) \omega_i \\
 \text{Borel} \downarrow & & \uparrow \text{Gauss-Laguerre} \\
 \hat{\mathcal{B}}\hat{u}^N(\xi) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{u_{n+1}}{n!} \xi^n & \xrightarrow{\text{Padé}} & P^N(\xi) = \frac{q_0 + q_1 \xi + \dots + q_q \xi^q}{r_0 + r_1 \xi + \dots + r_r \xi^r}
 \end{array}$$

TABLE 3.1 – *Algorithme Borel-Padé-Laplace (BPL)*

L'algorithme Borel-Padé-Laplace est utilisé, dans les applications numériques, comme la base d'un intégrateur temporel d'une équation d'évolution.

### 3.1.3 Schéma d'intégration temporelle

Considérons une équation différentielle

$$\frac{du}{dt} = F(t, u). \quad (3.13)$$

On peut construire un schéma d'intégration temporelle de cette équation basé sur la resommation. Ce schéma est composé des étapes suivantes :

- Calcul des termes de la série  $\hat{u}^N(t)$ ,
- Calcul de la somme de Borel  $\mathcal{S}^N(t)$  par BPL,
- Evaluation de l'erreur  $Err(t)$  à partir de  $\mathcal{S}^N(t)$ ,
- Continuation.

Notons que si la série calculée est convergente, l'algorithme BPL agit comme un prolongement dans un domaine plus grand que le disque de convergence.

A l'heure actuelle, l'erreur est évaluée à partir d'un calcul de résidu :

$$Err(t) = \frac{d}{dt} \mathcal{S}^N(t) - F(t, \mathcal{S}^N(t)).$$

Une étude théorique est en cours pour avoir une estimation *a priori* de cette erreur en fonction du temps. Appelons  $t_0$  la dernière valeur de  $t$  telle que l'erreur relative soit plus petite qu'une tolérance pré-fixée  $\varepsilon$ , c-à-d

$$\frac{\|Err(t_0)\|}{\|\mathcal{S}^N(t_0)\|} < \varepsilon. \quad (3.14)$$

On a donc une approximation analytique  $\mathcal{S}^N(t)$  de la solution dans l'intervalle  $[0, t_0]$ .

Pour atteindre des valeurs de  $t$  plus grandes, on effectue une continuation. Cela veut dire qu'on recommence l'algorithme, avec  $u(t_0)$  comme condition initiale.

On a donc un algorithme itératif. On n'a pas de pas de temps à proprement parler mais on peut définir un équivalent du pas de temps comme la taille  $\Delta t$  de l'intervalle de validité de  $\mathcal{S}^N(t)$  à chaque continuation.

## 3.2 Application à la résolution d'EDO

Les problèmes qu'on considère dans le reste de ce chapitre ont déjà été traités dans les travaux d'Hamdouni et Razafindralandy [Raz05, RHA08, RH13]. On les reprend ici pour illustrer l'algorithme BPL et pour rappeler que cet algorithme a permis de réduire (par rapport à des schémas classiques) le nombre d'itérations nécessaires pour résoudre certains problèmes d'évolution.

### 3.2.1 Equation d'Euler

Reprenons l'équation d'Euler décrite dans l'exemple 2.2.5. On y applique l'algorithme BPL, pour l'instant sans la technique de continuation. On tronque la série à l'ordre  $N = 10$  et on prend  $N_G = 6$  points de Gauss.

La FIGURE 3.1 montre une comparaison entre une solution de référence (calculée en haute précision par un logiciel de calcul symbolique), la solution approchée donnée par la somme partielle et celle calculée avec l'algorithme BPL. On y observe que la somme partielle s'éloigne assez rapidement de la solution de référence, la série d'Euler étant divergente. L'algorithme BPL donne une solution satisfaisante jusqu'à un temps beaucoup plus grand. Les effets numériques se font ressentir pour  $t$  plus grand que 2.



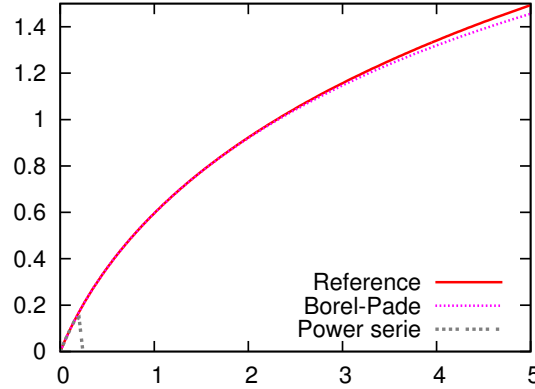


FIGURE 3.1 – Equation d'Euler : solution exacte (Reference), somme partielle de la série (Power Series) et algorithme BPL (Borel-Pade)

### 3.2.2 Equation quadratique

Reprenons l'équation non linéaire

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + u^2 = 0 \\ u(0) = 1. \end{cases} \quad (3.15)$$

La solution exacte à été donnée en (2.41).

La FIGURE 3.2, tirée de [RH13], compare les solutions numériques données par la somme partielle et la resommation. On y observe que la somme partielle explose bien avant d'atteindre le rayon de convergence. Il faudrait plus de termes pour améliorer l'approximation. Avec BPL, en revanche, la solution est satisfaisante jusqu'à environ  $t = 2$ .

Appliquons maintenant une continuation. L'algorithme BPL avec continuation a été décrit dans 3.1.3. L'algorithme sans resommation est similaire, seulement on ne resomme pas. Il se décompose en

- Calcul des termes de la série  $\hat{u}^N(t)$ ,
- Evaluation de l'erreur  $Err(t)$  à partir de  $\hat{u}^N(t)$ ,
- Continuation.

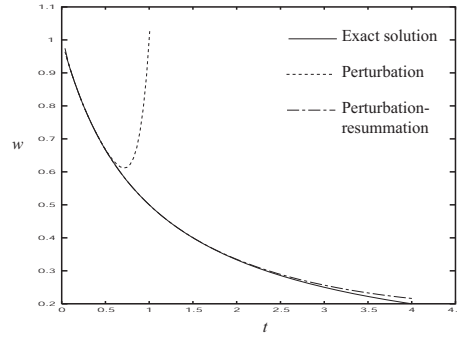


FIGURE 3.2 – Equation quadratique (3.15) : solution exacte, somme partielle de la série (Perturbation) et algorithme BPL (Perturbation-resommation)

L'erreur est également évaluée à partir du résidu, pour pouvoir comparer les deux algorithmes, bien que des évaluations d'erreur *à priori* existent [CDPF07].

On prend  $N = 8$  termes. Le critère d'erreur relative est fixé à  $\varepsilon = 10^{-2}$ .

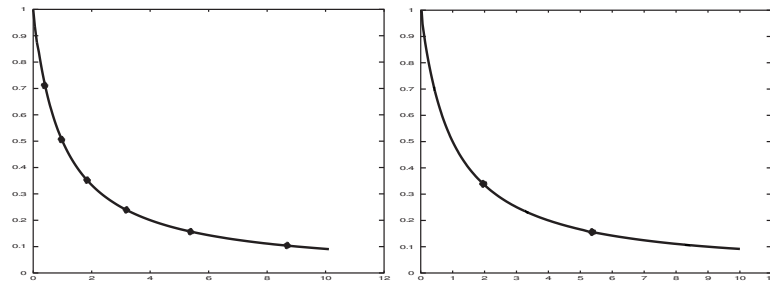


FIGURE 3.3 – Solution numérique de l'équation quadratique. A gauche : sans resommation. A droite : avec resommation.

La FIGURE 3.3 présente les solutions approximées par les schémas avec et sans resommation. Les points gras sur les graphiques indiquent les instants  $t_0$  où on a dû effectuer une continuation. On observe qu'avec la resommation, on a besoin de beaucoup moins d'itérations (2 contre 6 sans resommation).

Le tableau 3.2 montre l'évolution du nombre d'itérations lorsqu'on prend plus de termes. On y voit que le gain de BPL (en nombre d'itérations) augmente avec  $N$ .

Avant de considérer des applications plus réalistes, prenons un dernier exemple.

	$N = 8$	$N = 15$
Sans resommation	6 points	5 points
Avec resommation	2 points	1 point

TABLE 3.2 – Nombre de points de continuation pour l'équation (2.37)

### 3.2.3 Un problème périodique simple

Considérons l'équation

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad u(0) = 1, v(0) = 0. \quad (3.16)$$

Le point  $(u, v)$  décrit le cercle unité. On mène les calculs sur une période  $[0, 2\pi]$ . Comme la solution exacte est connue, on peut calculer l'écart de la solution approchée par rapport à celle-ci. On remplace dans cette sous-section le critère sur le résidu relatif (3.14) par l'écart relatif avec la solution exacte.

On utilise les schémas d'Euler explicite, de Runge-Kutta d'ordre 2 et de Runge Kutta d'ordre 4, et on les compare avec le schéma d'intégration temporel basé sur BPL décrit en 3.1.3 avec continuation. On appellera également BPL ce schéma.

La TABLE 3.3 présente le nombre d'itérations requises par chaque schéma lorsqu'on fait varier la tolérance  $\varepsilon$ . On voit que c'est avec le schéma BPL que le nombre d'itérations requises est le plus faible. Par exemple, pour une précision de  $10^{-6}$ , BPL a besoin de 10 fois moins d'itérations que la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.

Precision	Euler exp.	RK2	RK4	BPL
$10^{-2}$	1904	65	10	3
$10^{-3}$	19042	199	17	4
$10^{-4}$	190400	629	30	5
$10^{-6}$	$1.9 \cdot 10^7$	6284	96	9

TABLE 3.3 – Nombre d'itérations pour atteindre  $t = 2\pi$  ; avec le schéma d'Euler explicite, les méthodes de Runge-Kutta d'ordre 2 et 4, et BPL

Les données de la table 3.3 (sauf la méthode d'Euler explicite) sont tracées sur la FIGURE 3.4 avec des échelles logarithmiques. En abscisse, on a le paramètre de précision  $\varepsilon$  et en ordonnée le nombre d'itérations. Cette figure montre que c'est avec

le schéma BPL qu'on a la pente la plus faible. Autrement dit, plus on veut de la précision, plus le schéma BPL est intéressant.

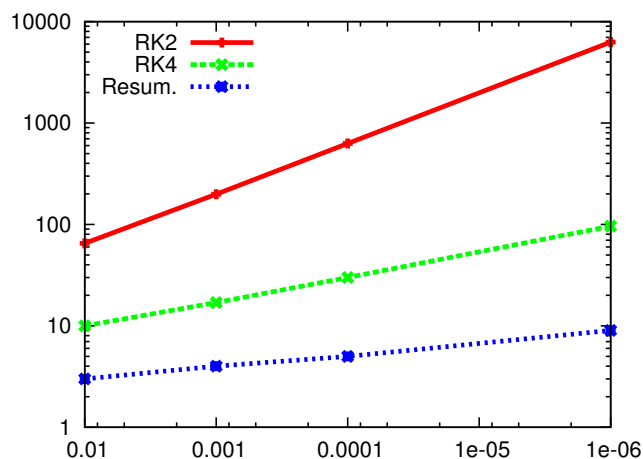
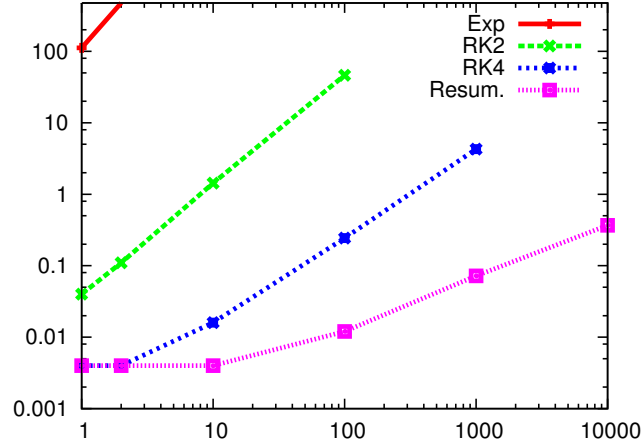


FIGURE 3.4 – Nombre de pas de temps pour atteindre  $t = 2\pi$  (Resum=BPL)

On peut également s'intéresser aux temps de calcul CPU, bien que ceux-ci ne reflètent pas toujours la rapidité d'un schéma. En effet, la rapidité dépend du niveau d'optimisation de chaque schéma. Les comparaisons qui figurent ici sont donc données à titre indicatif.

Les temps de calcul CPU sont reportés sur la FIGURE 3.5. Ils ont été obtenus en fixant  $\varepsilon = 10^{-6}$ . Cette fois, c'est le temps final  $t_{max}$  qui varie. Comme on peut le voir, la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 et BPL sont comparables pour des calculs sur un petit intervalle de temps (inférieur à deux périodes). En fait, les temps CPU de ces deux schémas sont trop faibles pour la précision de la machine et on n'a pas de certitude sur la comparaison. En revanche, pour  $t_{max}$  élevé, il est clair que BPL demande bien moins de temps de calcul. Par exemple, pour atteindre 1000 périodes avec une précision relative de  $10^{-6}$ , BPL a besoin de  $7.2 \cdot 10^{-1}$  temps CPU, ce qui fait 59 fois moins que la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (4.3 temps CPU).

Dans la dernière section, on va s'intéresser à des équations de la mécanique des


 FIGURE 3.5 – Evolution du temps CPU. En abscisse :  $t_{max}/2\pi$ . (Resum=BPL)

fluides. Plus précisément, on traitera un modèle réduit des équations de Navier-Stokes Obtenus par P.O.D (Proper Orthogonal Decomposition). On reviendra sur les équations de Navier-Stokes complètes dans le chapitre 5.

### 3.3 Système dynamique d'ordre réduit pour les équations de Navier-Stokes

Considérons un fluide newtonien incompressible de densité  $\rho$  et de viscosité cinématique  $\nu$ . L'écoulement de ce fluide est régi par les équations de Navier-Stokes :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(u \otimes u) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta u \\ \operatorname{div} u = 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

où  $u$  et  $p$  sont respectivement le champs de vitesse et le champ de pression. On va réduire ces équations par la méthode de décomposition aux valeurs propres (POD). On ne va pas décrire cette méthode en détail mais esquisser uniquement ses grandes lignes. On pourra trouver plus de détails dans [Lum67, Sir87a, Sir87b, Sir87c, AHLS88].

On projette  $u$  sur une base hilbertienne  $(\Phi^i)_{i=1,\dots,\infty}$ , composée de champs à divergence nulle :

$$u(t, x) = \sum_{i=1}^{+\infty} \varrho^i(t) \Phi^i(x). \quad (3.18)$$

Cette base est généralement déterminée soit numériquement soit expérimentalement et dépend de la configuration de l'écoulement. Les composantes  $\Phi^i$  de  $u$  seront les *modes* et les  $\varrho^i$  sont appelées les modes temporels.

Dans la pratique, la décomposition (3.18) est tronquée à l'ordre  $m$ . En injectant cela dans les équations de départ (3.17), on obtient un système de  $m$  équations aux dérivées ordinaires non linéaires suivantes :

$$\frac{d\varrho^i}{dt} + \sum_{j,l=1}^m Q_{jl}^i \varrho^j \varrho^l + \sum_{j=1}^m L_j^i \varrho^j = F^i(t), \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (3.19)$$

Les  $Q_{jl}^i$  et les  $L_j^i$ , obtenus par la projection des termes de convection et de diffusion dans la base, sont connus. Les  $F^i$  contiennent la contribution de la pression. Dans les cas qui seront traités, ces  $F^i$  sont annulés grâce à un changement de variables adaptées.

Une propriété importante de la POD est qu'un très petit nombre de modes est suffisant pour capturer l'énergie contenue dans l'écoulement.

Le premier cas qui sera considéré est l'écoulement d'air dans une cavité entraînée (voir FIGURE 3.6). La vitesse d'entraînement est  $U_{ref} = 0.15 \text{ ms}^{-1}$ . Les fonctions de la base ont été calculées dans [All02] et ne sont pas reproduites ici.

On comparera les schémas de Runge-Kutta d'ordre 5 (RK5) à pas adaptatifs avec BPL. Pour RK5, le critère de précision est basé sur

$$\frac{E}{\|\varrho(t)\|} \leq \varepsilon \quad (3.20)$$

où  $\varrho = (\varrho^i)_i$  et  $E$  est l'erreur estimée.  $\varepsilon$  est le même paramètre que dans (3.14). On prendra comme solution de référence une projection sur la base  $(\Phi^i)_{i=1,\dots,m}$  d'une solution numérique des équations de Navier-Stokes complètes.

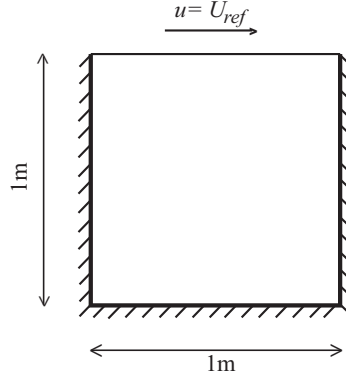


FIGURE 3.6 – Geometrie de la cavité entraînée

Pour BPL, on prend  $N = 10$ . On va supposer que la série est convergente ou est Borel sommable dans la direction  $\mathbb{R}^+$  (en fait, la solution formelle des équations de Navier-Stokes complètes est de Gevrey et Borel-sommable [CT06, CLT08]).

La figure FIGURE 3.7 présente les solutions approchées avec RK5 et BPL pour  $m = 4$  modes et jusqu'à  $t = 20s$ . On y voit d'abord que RK5 et BPL donnent pratiquement les mêmes solutions aux points où RK5 fournit une solution. On voit aussi que les deux approximations s'écartent assez rapidement de la solution de référence. Ce fait est dû à la POD (erreurs numériques lors du calcul de la base, troncation de 3.18, ...) et n'est pas causé par les schémas d'intégration temporel. Il existe des méthodes [Rem91, CBS05] pour atténuer cet écart mais cela n'est pas notre objet.

La FIGURE 3.8a) compare le nombre de pas de temps nécessaire pour atteindre 20, 50 and 100 secondes, avec  $m = 4$  modes ( $N = 10$ ). Elle montre que BPL nécessite moins de pas de temps que RK5, soit 35% de moins pour atteindre 100 secondes. Ce gain est encore plus important, comme montre la courbe de droite de la FIGURE 3.8, lorsqu'on monte le nombre de modes à calculer à  $m = 10$ . En effet, pour atteindre 10s, BPL requiert 42% d'itérations en moins par rapport à RK5.

D'autres résultats sur les équations de Navier-Stokes réduites sont disponibles dans [Raz05, RHA08, RH13]. Ces résultats mènent essentiellement aux mêmes conclu-

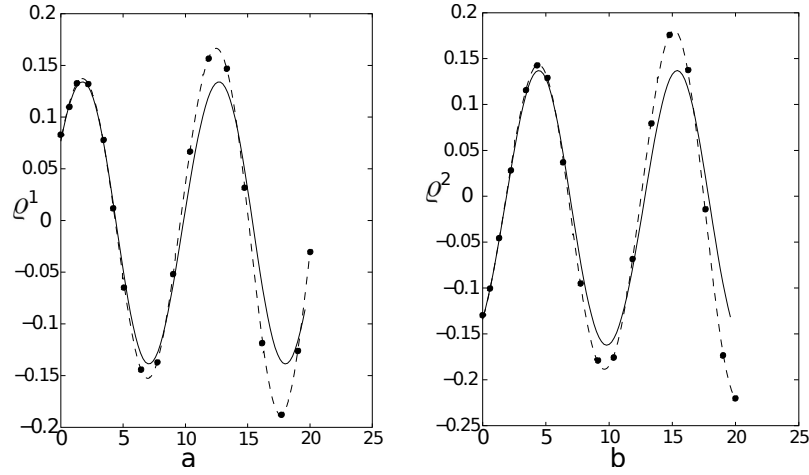


FIGURE 3.7 – Evolution de  $q^1$  (a) et  $q^2$  (b) avec  $t$   
 — Solution de référence,  $\cdots$  RK5,  $---$  BP

sions, à savoir que BPL nécessite moins d'itérations et que son gain augmente avec la taille du système à résoudre.

### 3.4 Conclusion

Les calculs présentés ici assurent l'intérêt de BPL en tant qu'intégrateur numérique. Ils montrent que BPL peut rivaliser avec les méthodes classiques. Il est généralement meilleur en terme de nombre d'itérations.

Le nombre d'itérations (et donc le temps CPU) n'est cependant pas le seul indice de qualité d'un schéma d'intégration temporelle. Dans le chapitre suivant, on examinera le schéma BPL par rapport à sa capacité à reproduire les propriétés physiques des phénomènes modélisés.



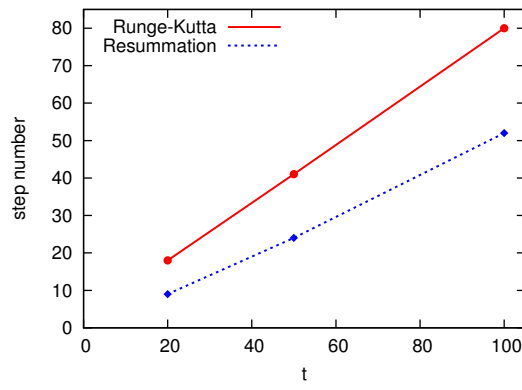
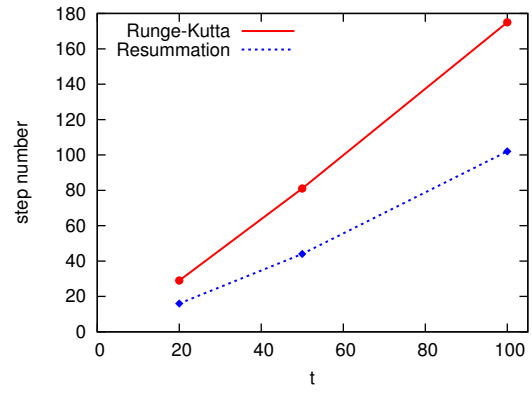
a) avec  $m = 4$  modesb) avec  $m = 10$  modes

FIGURE 3.8 – Evolution du nombre de pas de continuation

## Chapitre 4

# Etudes qualitatives

Comme on l'a déjà annoncé, on s'intéresse particulièrement à des problèmes d'évolution sur un grand intervalle de temps. Pour la résolution numérique de tels problèmes, il est important d'avoir un schéma d'intégration stable (dans le sens où la solution numérique ne s'écarte pas trop de la trajectoire au bout d'un temps long) et respectueux de la structure des équations et de ses propriétés d'invariance. Dans ce chapitre, on s'intéresse aux qualités de notre schéma BPL par rapport à ces points, à travers des exemples numériques. On va commencer par un rappel sur les systèmes hamiltoniens.

### 4.1 Rappels sur les systèmes hamiltoniens

On considère un système mécanique, dont l'espace des configurations est noté  $M$ , supposé être une variété différentielle de dimension  $\mathfrak{m}$ . On note  $q = (q^1, \dots, q^{\mathfrak{m}})$  les coordonnées locales d'un point de  $M$ , dites aussi les coordonnées généralisées. On notera  $T^*M$  le fibré cotangent de  $M$ . Il s'agit de l'espace des phases habituel. Les coordonnées locales dans  $T^*M$  sont  $(q, p)$  où  $q \in M$  et  $p = (p^1, \dots, p^{\mathfrak{m}}) \in T_q^*M$ , les  $p^i$  sont les moments conjugués.

En coordonnées locales, un système hamiltonien, est un système dynamique de la forme

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \\ \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \\ (q(0), p(0)) = (q_0, p_0) \end{cases} \quad (4.1)$$

où  $H$  est l'hamiltonien du système qui est une fonction

$$\begin{aligned} H : T^*M &\rightarrow \mathbb{R} \\ (q, p) &\mapsto H(q, p) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Sous forme synthétique, le système (4.1) peut s'écrire

$$\frac{du}{dt} = J \nabla H(u) \quad (4.3)$$

où  $u = (q, p)$ , et

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix},$$

$I_m$  étant la matrice identité de  $\mathbb{R}^m$ .

Notons que  $T^*M$  est muni d'une 2-forme  $\omega$  symplectique canonique. On rappelle qu'une 2-forme symplectique est une forme bilinéaire antisymétrique non-dégénérée définie sur l'espace  $(T^*M)^2$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $\xi = (\xi_1^q, \dots, \xi_m^q, \xi_1^p, \dots, \xi_m^p)$  et  $\eta = (\eta_1^q, \dots, \eta_m^q, \eta_1^p, \dots, \eta_m^p) \in (T_{(q,p)}^*M)$ , alors :

$$\begin{aligned} \omega_{(q,p)} : (T_{(q,p)}^*M)^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\xi, \eta) &\mapsto \sum_{i=1}^m \xi_i^p \eta_i^q - \xi_i^q \eta_i^p \end{aligned} \quad (4.4)$$

On identifie  $\omega$  avec une 2-forme différentielle par une transformation et on note  $\omega := dp \wedge dq$  la 2-forme symplectique canonique. On peut écrire :

$$dp \wedge dq = \sum_{i=1}^m dp^i \wedge dq^i \quad (4.5)$$

Alors  $\omega$  est fermé, c-à-d

$$d\omega = 0.$$

Rappelons quelques propriétés des systèmes hamiltoniens.

#### 4.1.1 Quelques propriétés d'un système hamiltonien

On montre que si  $H$  ne dépend pas explicitement du temps alors c'est une constante du mouvement :

**Théorème 4.1.1.** *Si  $H(q, p)$  ne dépend pas explicitement du temps alors*

$$\frac{dH}{dt} = 0. \quad (4.6)$$

★

Redonnons la définition d'une transformation symplectique ou canonique.

**Définition 4.1.2.** *Soit  $\Phi$  une transformation définie dans un domaine  $D$  de  $T^*M$ ,*

$$\begin{aligned} \Phi : D \subset T^*M &\longrightarrow T^*M \\ (q, p) &\longmapsto (Q, P). \end{aligned}$$

*$\Phi$  est appelée symplectomorphisme si elle conserve la 2-forme (4.5), c-à-d*

$$\omega = \Phi^*\omega \quad (4.7)$$

◆

On note  $\varphi_t$  le flot

$$\varphi_t : u_0 = (q_0, p_0) \longmapsto u(t) = (q(t), p(t)). \quad (4.8)$$

qui associe à chaque condition initiale  $(q_0, p_0) = (q(t_0), p(t_0))$  du système (4.1) au temps  $t_0$  la solution  $(q(t), p(t))$  au temps  $t > t_0$ . On a alors le théorème suivant

**Théorème 4.1.3.** *Le flot  $\varphi_t$  défini en (4.8) est un symplectomorphisme. En d'autres termes, la 2-forme  $\omega = dp \wedge dq$  se conserve au cours du temps :*

$$dp_0 \wedge dq_0 = dp(t) \wedge dq(t). \quad \forall t \geq 0.$$

★

Notons  $\Omega_0$  un domaine de conditions initiales de l'espace des phases, posons  $\Omega_t = \varphi_t(\Omega_0)$  sa transformée par le flot (voir FIGURE 4.1). Une conséquence du caractère hamiltonien est donné par le théorème de Liouville :

**Théorème 4.1.4.** *Soit  $|\Omega_t|$  le volume de  $\Omega_t$  (définie ci-dessus)*

$$|\Omega_t| = \int_{\Omega_t} \alpha.$$

*où  $\alpha$  est une forme volume de  $T^*M$ . Alors  $|\Omega_t| = |\Omega_0| \quad \forall t \geq 0$*

★

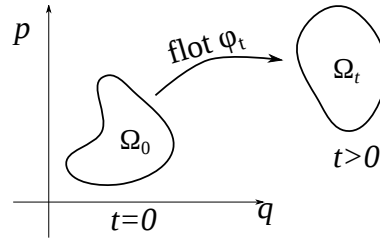


FIGURE 4.1 – Evolution d'un volume dans l'espace des phases

Dans la sous-section suivante, on va voir d'autres propriétés de conservation, mais dans le cas où le système peut être décrit par une paire de Lax.

#### 4.1.2 Paire de Lax

**Définition 4.1.5.** *On dit qu'un système hamiltonien, de dimension  $\dim T^*M = 2\mathfrak{m}$ , est Liouville intégrable s'il possède  $\mathfrak{m}$  intégrales premières  $I^i$  indépendantes*

et en involution, i.e. les crochets de Poisson entre les  $I^i$  sont nuls :

$$\{I^i, I^j\} = \sum_{k=1}^{\mathfrak{m}} \frac{\partial I^i}{\partial q^k} \frac{\partial I^j}{\partial p^k} - \frac{\partial I^i}{\partial p^k} \frac{\partial I^j}{\partial q^k} = 0$$

pour tout  $i$  et  $j$  dans  $\{1, \dots, \mathfrak{m}\}$ . ◆

On montre que (voir [BV90]) :

**Théorème 4.1.6.** *Si un système est Liouville intégrable alors il existe deux fonctions  $L$  et  $M$  de  $T^*M$  dans une certaine algèbre de Lie, de crochet  $[\cdot, \cdot]$  telles que l'équation (4.1) soit équivalente à*

$$\frac{dL}{dt} = [M, L]. \quad (4.9)$$

★

Le couple  $(L, M)$  est appelé paire de Lax [Lax68]. Pour un système Liouville intégrable,  $L$  et  $M$  sont obtenus en fonctions des intégrales premières  $I^i$  et les actions-angles. Bien que la construction de  $L$  et  $M$  n'est pas utile si on connaît les intégrales premières, il est important de signaler que si on est capable de trouver une paire de Lax pour un système hamiltonien, alors on possède ainsi  $\mathfrak{m}$  intégrales premières. Si elles sont indépendantes et en involution alors le système est intégrable.

Comme on est en dimension finie,  $L$  et  $M$  peuvent être identifiés à des matrices. L'intérêt d'écrire le système sous la forme (4.9) est qu'il est plus facile de trouver des intégrales premières sous cette forme. En effet, on a le théorème suivant :

**Propriétés 4.1.7.** *Si  $(L, M)$  est solution de (4.9) et  $\lambda$  est une valeur propre de  $L$  alors*

$$\frac{d\lambda}{dt} = 0. \quad (4.10)$$

On dit que le système (4.9) est *iso-spectral*.

PREUVE. Comme les valeurs propres d'une matrice de dimension finie sont les racines du polynôme caractéristique associé  $P_L(\lambda)$ , il suffit de voir l'évolution du polynôme

au cours du temps. Or les monômes du polynôme  $P_L(\lambda)$  s'expriment en terme de la trace des puissances  $L^r$  de  $r$  pour  $r = 1, \dots, \mathbf{m}$ . Il suffit alors de regarder l'évolution de ces matrices ainsi que leurs traces. En effet, grâce à la relation

$$\frac{dL^r}{dt} = \frac{dL}{dt} L^{r-1} + L \frac{dL^{r-1}}{dt},$$

il est aisé de montrer par récurrence que

$$\frac{dL^r}{dt} = \sum_{k=1}^r L^{k-1} \frac{dL}{dt} L^{r-k}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{dL^r}{dt} &= \sum_{k=1}^r L^{k-1} [M, L] L^{r-k} \\ &= \sum_{k=1}^r (L^{k-1} M L^{r-k+1} - L^k M L^{r-k}). \end{aligned}$$

L'invariance de la trace par permutation cyclique entraîne :

$$\frac{d}{dt} \text{tr} L^r = \sum_{k=1}^r [\text{tr}(M L^r) - \text{tr}(M L^r)] = 0.$$

■

D'après la preuve précédente, on a :

**Propriétés 4.1.8.**

$$\frac{d}{dt} \text{tr} L^r = 0, \quad \forall r = 1, \dots, \mathbf{m}. \quad (4.11)$$

**Exemple 4.1.9** (Système de Toda). Le système de Toda décrit le mouvement de particules en interaction. On considère le cas périodique, avec un nombre  $\mathbf{m}$  de particules, et un potentiel d'interaction exponentiel. Les unités du système sont choisies de telle sorte que la masse des particules soit  $m = 1$ . Le hamiltonien s'exprime comme suit :

$$H(q, p) = \sum_{i=0}^{\mathbf{m}} \frac{(p^i)^2}{2} + \sum_{i=1}^{\mathbf{m}-1} e^{-(q^{i+1} - q^i)}$$

où  $q^i$  est la position de la  $i$ -ème particule et  $p^i$  son moment. Les équations du système sont

$$\begin{cases} \frac{dq^i}{dt} = p^i, \\ \frac{dp^i}{dt} = e^{-(q^i - q^{i-1})} - e^{-(q^{i+1} - q^i)}. \end{cases} \quad i = 1 \dots n \quad (4.12)$$

Grâce à l'introduction des variables [Fla74]

$$a^i = e^{-(q^{i+1} - q^i)}.$$

le système hamiltonien (4.12) s'écrit

$$\begin{cases} \frac{da^i}{dt} = a^i(p^i - p^{i+1}), \\ \frac{dp^i}{dt} = a^{i-1} - a^i. \end{cases} \quad (4.13)$$

Il est alors facile de voir que (4.13) s'écrit sous forme matricielle (4.9), avec

$$L = \begin{pmatrix} p^1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a^1 & p^2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & a^2 & p^3 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a^{n-1} & p^n \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a^2 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^{n-1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

□

Dans la section suivante, on va examiner le comportement de la série solution formelle, vis-à-vis de l'invariance de la forme symplectique par le flot et de l'isospectralité.

## 4.2 Etude du schéma BPL

On va commencer par examiner la symplecticité de notre schéma BPL, décrit dans le chapitre 3.



### 4.2.1 Symplecticité

D'abord, donnons la définition d'un flot numérique ainsi que d'un schéma symplectique. Soit un système différentiel donné par l'équation suivante :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = F(u(t)), \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (4.15)$$

Rappelons que dans le cas d'un système hamiltonien,  $F = J\nabla H$  et  $u = (q, p)$ . En partant d'une condition initiale  $u(t)$  à un instant  $t$  dans un domaine  $\Omega_d$ , on cherche une approximation numérique de la solution  $u$  à l'instant  $t + \delta t$  notée  $\tilde{u}(t + \delta t)$  qui est supposée dans le domaine  $\Omega_d$ .

**Définition 4.2.1.** *Le flot numérique à un pas de temps associé au système (4.15) est donné par l'application  $\tilde{\varphi}_{\delta t}$  qui, à un point  $u(t)$  dans  $\Omega_d$ , associe un point  $\tilde{u}(t + \delta t)$ , approximation de la solution  $u(t + \delta t)$  du système à l'instant  $t + \delta t$  :*

$$\tilde{\varphi}_{\delta t} : \begin{array}{ccc} \Omega_d & \rightarrow & \Omega_d \\ u(t) & \mapsto & \tilde{u}(t + \delta t) = \tilde{\varphi}_{\delta t}(u(t)) \end{array} \quad (4.16)$$

◆

Notons que pour  $t = n\delta t$ ,  $\tilde{\varphi}_t = (\tilde{\varphi}_{\delta t})^n$ .

**Exemple 4.2.2.** le flot numérique d'un schéma Euler d'ordre 1 est donnée par l'application  $\tilde{\varphi}_{\Delta t}^{Euler}$  définie par :

$$\tilde{\varphi}_{\Delta t}^{Euler}(u^n) = u^n + \Delta t F(u^n) \quad (4.17)$$

□

On donne maintenant la définition d'un schéma numérique symplectique.

**Définition 4.2.3.** *Un schéma numérique est symplectique si son flot numérique est un symplectomorphisme.* ◆

Pour un schéma basé sur une discrétisation  $(t^j)$  du temps, cette définition se traduit par la conservation de la forme volume discrète à chaque pas de temps :

$$dp(t^j) \wedge dq(t^j) = dp(t^{j+1}) \wedge dq(t^{j+1}), \quad \forall j \geq 1. \quad (4.18)$$

Pour notre schéma BPL qui ne se base pas sur une discrétisation du temps, la symplecticité équivaut à

$$dp_0 \wedge dq_0 = \mathcal{S}^N \hat{p}(t) \wedge \mathcal{S}^N \hat{q}(t), \quad \forall t \in [0, t_0] \quad (4.19)$$

où  $\hat{q}(t)$  et  $\hat{p}(t)$  sont les séries solutions formelles, et  $[0, t_0]$  est le domaine d'analyticité de la somme de Borel.

A l'heure actuelle, on n'a pas de résultat théorique qui montre la propriété (4.19). En revanche, dans les théorèmes 4.2.5 et 4.2.7, on donnera un résultat sur la symplecticité d'un schéma basé sur (la somme partielle de) la série. On montrera ensuite numériquement dans la section (4.3) que le procédé de resommation ne semble pas détruire la symplecticité.

Exprimons le flot du schéma qui approxime la solution  $u$  par la série  $\hat{u}$ . On l'appellera flot de  $\hat{u}$ , pour simplifier.

**Lemme 4.2.4.** *Le flot de  $\hat{u}$  est*

$$\varphi_{t, \hat{u}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} J D^{n-1} \nabla H \quad \text{où} \quad D^n = \frac{d^n}{dt^n}$$

en convenant que  $D^n \nabla H = -J$  si  $n = -1$ .

PREUVE. Lorsqu'on remplace la solution  $u$  de 4.3 par la série entière  $\hat{u}$ , on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} n u_n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} J D^{n-1} \nabla H(u_0).$$

Ainsi, par identification selon les puissances de  $t$ ,

$$u_n = \frac{1}{n!} J D^{n-1} \nabla H(u_0). \quad (4.20)$$

Par conséquent,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} J D^{n-1} \nabla H(u_0).$$

■

La relation (4.20) n'est que la forme compacte de

$$\begin{cases} q_n = \frac{1}{n!} D^{n-1} \frac{\partial H}{\partial p}(q_0, p_0), \\ p_n = -\frac{1}{n!} D^{n-1} \frac{\partial H}{\partial q}(q_0, p_0). \end{cases} \quad (4.21)$$

On a, par construction, l'invariance de la 2-forme symplectique lorsque la série est convergente.

**Théorème 4.2.5.** *Si la série est convergente alors*

$$d\hat{p}(t) \wedge d\hat{q}(t) = dp_0 \wedge dq_0. \quad (4.22)$$

★

Comme conséquence, on a :

**Corollaire 4.2.6.** *Si la série est convergente alors, pour chaque  $n \geq 1$ ,*

$$\sum_{k=0}^n dp_k \wedge dq_{n-k} = 0. \quad (4.23)$$

PREUVE. Il suffit de développer les séries  $\hat{p}$  et  $\hat{q}$ , de les injecter dans (4.22) et d'identifier les coefficients de  $t$ . ■

Si on tronque la série à l'ordre  $N$ , alors le flot de  $\hat{u}^N$  est

$$\varphi_{t, \hat{u}^N} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{t^n}{n!} J D_H^{n-1}.$$

Le théorème suivant montre que le flot de  $\hat{u}^N$  est symplectique à l'ordre  $N + 1$ .

**Théorème 4.2.7.** *Si la série est convergente alors*

$$d\hat{q}^N(t) \wedge d\hat{p}^N(t) - dq_0 \wedge dp_0 = O(t^{N+1}). \quad (4.24)$$

★

PREUVE. En développant l'expression de  $\hat{q}^N$  et  $\hat{p}^N$  et en réarrangeant selon la puissance de  $t$ , on a :

$$d\hat{q}^N(t) \wedge d\hat{p}^N(t) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n dq_n \wedge dp_{n-m} t^n + \sum_{n=N+1}^{2N} \sum_{m=n-N}^N dq_n \wedge dp_{n-m} t^n.$$

En réutilisant (4.23), on déduit :

$$d\hat{q}^N(t) \wedge d\hat{p}^N(t) - dq_0 \wedge dp_0 = \sum_{n=N+1}^{2N} t^n \sum_{m=n-N}^N dq_m \wedge dp_{k-m}. \quad (4.25)$$

■

Montrons maintenant que si le système est représenté par une paire de Lax, alors le flot de la série est également iso-spectral.

### 4.2.2 Iso-spectralité

On considère un système régi par une paire de Lax  $(L, M)$ . Rappelons que l'iso-spectralité équivaut à l'invariance des traces des puissances de  $L$  (voir (4.11)).

On représente  $L$  par la série

$$\hat{L}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n t^n. \quad (4.26)$$

Les termes de la série vérifient

$$(n+1)L_{n+1} = \sum_{k=0}^n [M_k, L_{n-k}].$$

Montrons d'abord que la série (4.26) converge si  $M$  est constant. Dans ce cas particulier,

$$(n+1)L_{n+1} = ML_n - L_n M.$$

Et, par récurrence :

$$L_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} M^{n-k} L_0 M^k, \quad n \geq 1. \quad (4.27)$$

Supposons que  $L$  et  $M$  appartiennent à un espace normé. On a alors la proposition suivante qui montre l'évolution des termes de la série.

**Proposition 4.2.8.** *Si  $M$  est constant alors*

$$\|L_n\| \leq \|L_0\| \frac{(2\|M\|)^n}{n!}. \quad (4.28)$$

*Et si  $\|M\| < \infty$  alors la série (4.26) converge pour tout  $t$  dans  $\mathbb{C}$ .*

PREUVE. La relation (4.28) s'obtient par estimation directe :

$$\begin{aligned} \|L_n\| &\leq \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \left\| \binom{n}{k} M^{n-k} L_0 M^k \right\| \\ \|L_n\| &\leq \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \|L_0\| \|M\|^n \\ \|L_n\| &\leq \frac{2^n}{n!} \|L_0\| \|M\|^n \end{aligned}$$

■

Si les séries sont convergentes alors  $\hat{L}$  est iso-spectral par construction. Autrement dit,

**Théorème 4.2.9.** *Si les séries  $\hat{L}$  et  $\hat{M}$  sont convergentes et sont solutions formelles de (4.9) alors*

$$\text{tr}[\hat{L}(t)]^r = \text{tr} L_0^r, \quad \forall r \in \{0, \dots, \mathfrak{m}\}. \quad (4.29)$$

★

Après ces études théoriques, on va effectuer quelques tests numériques. Dans la section qui suit, on va examiner, entre autres, la conservation numérique du hamiltonien et du volume. Et dans la dernière section, on regardera de plus près l'iso-spectralité, pour un système décrit par une paire de Lax.

### 4.3 Résolutions numériques

On va résoudre numériquement les équations d'un oscillateur harmonique, d'un oscillateur anharmonique et du système de Kepler. On prend d'abord quelques exemples très simples mais qui permettent d'éclairer les propriétés des schémas.

#### 4.3.1 Oscillateur harmonique

Considérons l'évolution d'un pendule simple, à faible amplitude. L'équation linéarisée est un système hamiltonien, avec

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2). \quad (4.30)$$

La trajectoire dans l'espace des phases est un cercle.

On résout le système, avec les conditions initiales

$$q(0) = 1, \quad p(0) = 0$$

avec le schéma d'Euler explicite et avec BPL. Pour BPL, on prend  $N = 8$  termes dans la série. Les autres paramètres peuvent être trouvés dans le paragraphe 3.2.3.

Les termes des séries  $\hat{q}$  et  $\hat{p}$  sont :

$$q_n = \begin{cases} \frac{(-1)^k}{(2k)!} q_0 & \text{si } n = 2k, \\ \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} p_0 & \text{si } n = 2k+1, \end{cases} \quad (4.31)$$

et

$$p_n = \begin{cases} \frac{(-1)^k}{(2k)!} p_0 & \text{si } n = 2k, \\ \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!} q_0 & \text{si } n = 2k+1. \end{cases} \quad (4.32)$$

Ces séries sont convergentes.

La FIGURE 4.2 représente la trajectoire sur 10 périodes obtenue avec les deux méthodes. On voit que le schéma d'Euler introduit un léger décalage à chaque période, si bien qu'au bout de 10 périodes, la solution est bien éloignée du cercle. Avec le schéma BPL, on voit que la forme du cercle est bien reproduite.

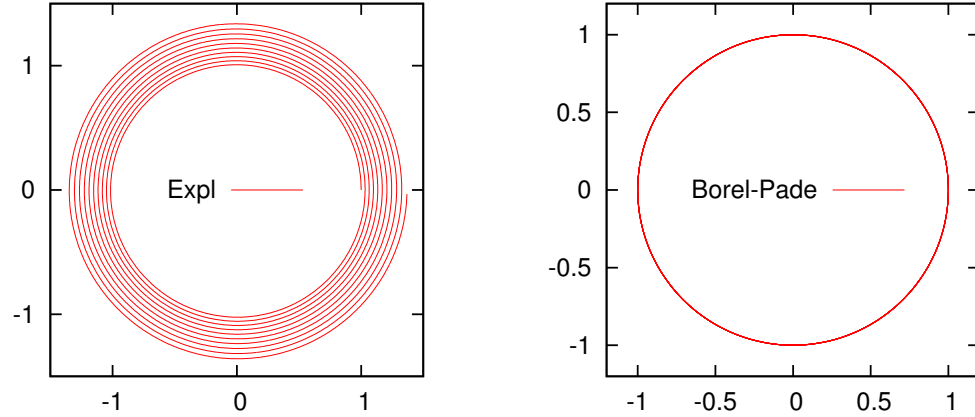


FIGURE 4.2 – Trajectoire sur 10 périodes. A gauche, avec la méthode d'Euler explicite. A droite, avec BPL.

On va maintenant examiner comment les deux schémas respectent le théorème 4.1.4. Prenons un polygone régulier à 20 côtés dans l'espace des phases. Ce polygone est dessiné avec des tirets rouges sur la FIGURE 4.3. Cette figure montre également l'évolution du polygone au cours du temps. On y observe que le schéma d'Euler ne respecte pas la conservation du volume. En effet, le polygone grossit petit-à-petit. En revanche, le graphique de droite montre qu'avec BPL, ce volume est conservé avec une bien meilleure précision.

Intéressons nous cette fois à un intervalle de temps beaucoup plus grand. On a pris comme volume initial un disque de rayon 0.2. Le graphique de gauche de la FIGURE 4.4 montre l'évolution de la surface du disque. On observe que sur 600s, l'augmentation de cette surface est de moins de 2.5%.

Sur le même graphique est représenté l'évolution du volume avec le schéma d'Euler symplectique (E-S). Ce volume est, bien sûr, constant puisque ce schéma est construit pour cela. Le schéma d'Euler symplectique, conçu de manière à conserver la structure

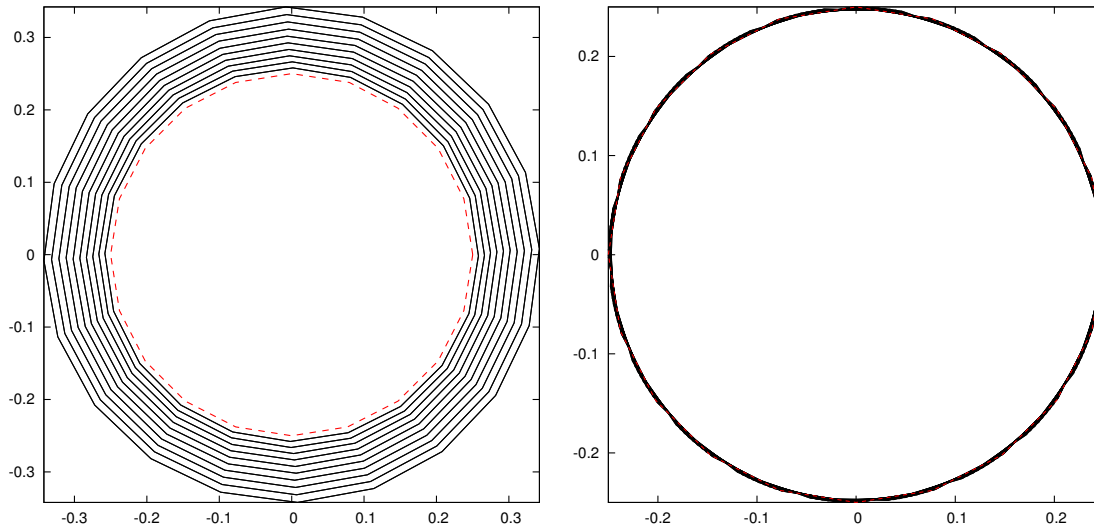


FIGURE 4.3 – Evolution d'un icosagone (en tirets rouges) sur 10 périodes. A gauche, avec la méthode d'Euler explicite. A droite, avec BPL.

hamiltonienne, est défini par (voir [SSC94])

$$\begin{cases} \frac{q(t^{n+1}) - q(t^n)}{\Delta t} = \frac{\partial H}{\partial p}(q(t^n), p(t^{n+1})), \\ \frac{p(t^{n+1}) - p(t^n)}{\Delta t} = -\frac{\partial H}{\partial q}(q(t^n), p(t^{n+1})). \end{cases} \quad (4.33)$$

On prend  $\Delta t = 10^{-3}$ .

Sur le graphique de droite de la FIGURE 4.4, on peut voir l'évolution numérique du hamiltonien  $H(p, q)$ . Selon le théorème 4.1.1, le hamiltonien devrait être constant. Avec le schéma symplectique E-S, le hamiltonien oscille entre deux valeurs limites, mais reste stable. Pour plus de clarté, on a supprimé du graphique tous les points autres que ceux qui sont proches de ces deux limites. Quand à BPL, on n'observe pas d'oscillation. Le hamiltonien augmente mais avec une pente très faible, de l'ordre de  $1 \cdot 10^{-4}$ .

Enfin, on présente sur la FIGURE 4.5 l'erreur (écart avec la solution exacte) en norme  $L^2$ . Cette figure montre une bonne fiabilité du schéma BPL.



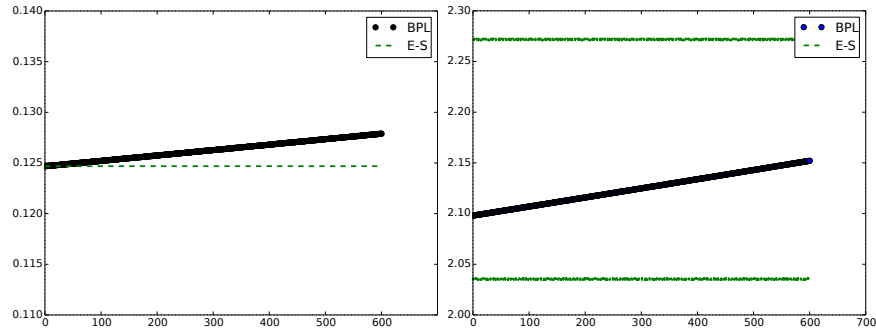


FIGURE 4.4 – Oscillateur harmonique. A gauche : évolution du volume. A droite : évolution du hamiltonien

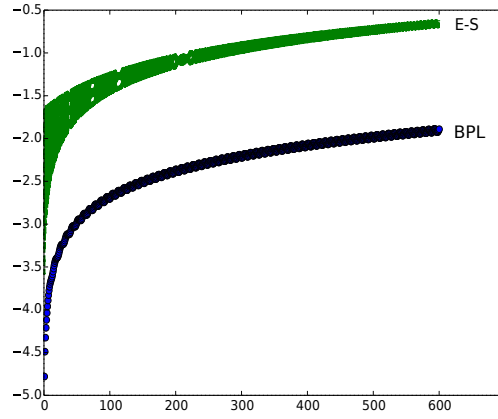


FIGURE 4.5 – Évolution de l'erreur (norme  $L^2$ ) dans l'espace des phases pour  $t \in [0, 600]$

Dans la sous-section suivante, on s'intéresse à un oscillateur anharmonique.

#### 4.3.2 Un oscillateur anharmonique

Considérons un oscillateur anharmonique, dont l'équation dérive du hamiltonien :

$$H(p, q) = \frac{p^2 + q^2}{2} + \frac{\beta}{r} q^r \quad (4.34)$$

où  $\beta \in \mathbb{R}$  et  $r \in \mathbb{N}^*$ . Le terme général de la série formelle en  $q$  est :

$$q_n = \frac{1}{n(n-1)} \left[ -q_{n-2} - \beta \left( \sum_{i_1 + \dots + i_{r-1} = n-2} q_{i_1} \cdots q_{i_{r-1}} \right) \right]. \quad (4.35)$$

Le FIGURE 4.6, à gauche, montre l'évolution d'un disque (approximé par un polygone de 50 côtés) dans l'espace des phases pour  $r = 4$ ,  $\beta = 1$  par BPL, avec  $N = 15$  termes. Le schéma d'Euler symplectique donne visuellement le même résultat. L'évolution de la surface du disque est représentée à droite de cette figure. On voit que les deux schémas conservent bien le volume. A partir de  $t = 4$ , on voit que les courbes s'écartent un peu de la valeur théorique. Ceci est dû à une difficulté à évaluer numériquement la surface (qui a une forme très allongée).

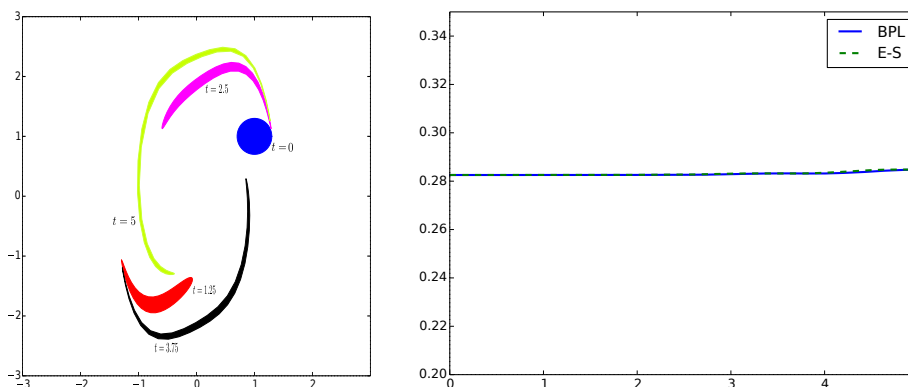


FIGURE 4.6 – Evolution de la géométrie (à gauche, dans l'espace des phases) et de l'aire (à droite) d'un disque en fonction du temps

Comme dans le cas de l'oscillateur harmonique, le schéma d'Euler symplectique approxime le hamiltonien avec des oscillations, comme le montre la FIGURE 4.7. Le schéma BPL évite ces oscillations et approxime le hamiltonien avec une grande précision.

On va prendre comme exemple suivant le problème à deux corps.

### 4.3.3 Problème à deux corps (Un est fixé)

On considère le système composé de deux corps, un soleil de masse  $M \gg 1$  et sa planète de masse  $m = 1$ . On se place dans un repère dont le soleil est l'origine. On note  $q = (q^1, q^2) \in \mathbb{R}^2$  la position de la planète, dans le plan du mouvement. L'évolution de  $q$  est gouvernée par :

$$\frac{d^2 q}{dt^2} = -\frac{\mu q}{|q|^3} \quad (4.36)$$

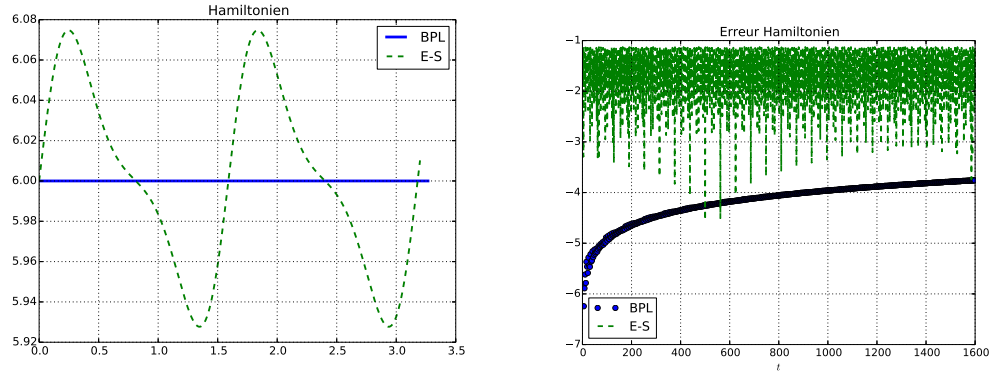


FIGURE 4.7 – *Oscillateur anharmonique.* À gauche : évolution numérique du hamiltonien sur un court intervalle. À droite : erreur sur l'hamiltonien sur un grand intervalle.

où  $\mu = GM$ ,  $G$  étant la constante de la gravitation universelle et  $|\cdot|$  la norme euclidienne. L'équation (4.36) s'écrit sous forme d'un système hamiltonien (4.1) avec

$$H(p, q) = \frac{|p|^2}{2} - \frac{\mu}{|q|}. \quad (4.37)$$

Selon la condition initiale, les termes de la série augmentent plus ou moins vite. Une étude sur la convergence de la série formelle solution devrait être effectuée. Mais pour l'instant, faisons une étude numérique pour savoir si nos séries convergent.

#### a) Etude numérique de la convergence

Rappelons le théorème de Cauchy-Hadamard.

**Théorème 4.3.1.** Soit  $\hat{u}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n \in \mathbb{C}[[t]]$ . Le rayon de convergence  $R$  est donné par

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|}. \quad (4.38)$$

★

On applique ce théorème séparément aux séries

$$\hat{q}^1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n^1 t^n, \quad \text{et} \quad \hat{p}^1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n^1 t^n. \quad (4.39)$$

On prend deux conditions initiales différentes :

$$q_0 = \left(\frac{1}{2}, 0\right), p_0 = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad (4.40)$$

et

$$q_0 = (1, 1), p_0 = (5, 5). \quad (4.41)$$

On peut voir l'évolution des termes et de  $\sqrt[n]{|u_n|}$  (pour  $u = q^1$  et  $u = p^1$ ) sur la FIGURE 4.8, pour ces deux conditions initiales et  $\mu = 1$ . On y observe qu'avec la condition initiale (4.40), la suite  $\sqrt[n]{|u_n|}$  semble converger vers une limite, qui vaudrait environ  $R = 1/2.1$ . Les séries (4.39) seraient donc convergentes. En revanche, avec les conditions initiales (4.41), la suite  $\sqrt[n]{|u_n|}$  ne semblent pas avoir une limite supérieure. Et même si elle en avait, cela voudrait dire qu'il faudrait beaucoup de termes (plus de 100) pour pouvoir approcher la somme de la série par une somme partielle.

Pour la résolution, il est donc raisonnable de considérer que les séries qui interviennent peuvent être divergentes. Le procédé de resommation est ainsi inévitable dans notre cas. Notons que, comme l'équation est non linéaire, l'utilisation du polygone de Newton n'est pas aisée. L'indice Gevrey des séries ne se détermine donc pas facilement. Des études numérique en cours, faites par minimisation, suggèrent que les séries correspondantes aux conditions initiales (4.41) serait de Gevrey d'indice  $s \in [0.76, 0.82]$ .

### b) Conservation du hamiltonien

On effectue un calcul sur  $60000s$ , avec les conditions initiales (4.40). On représente le hamiltonien et le moment cinétique sur la FIGURE 4.9. On peut y constater que, comme précédemment, le hamiltonien calculé avec le schéma d'Euler symplectique oscille avec le temps, tandis que le schéma BPL ne présente pas d'oscillations. On peut aussi constater que les deux schémas conservent le moment cinétique avec une bonne précision.

Dans la dernière section, on va étudier l'iso-spectralité dans le cas d'un système hamiltonien représentable par une paire de Lax.

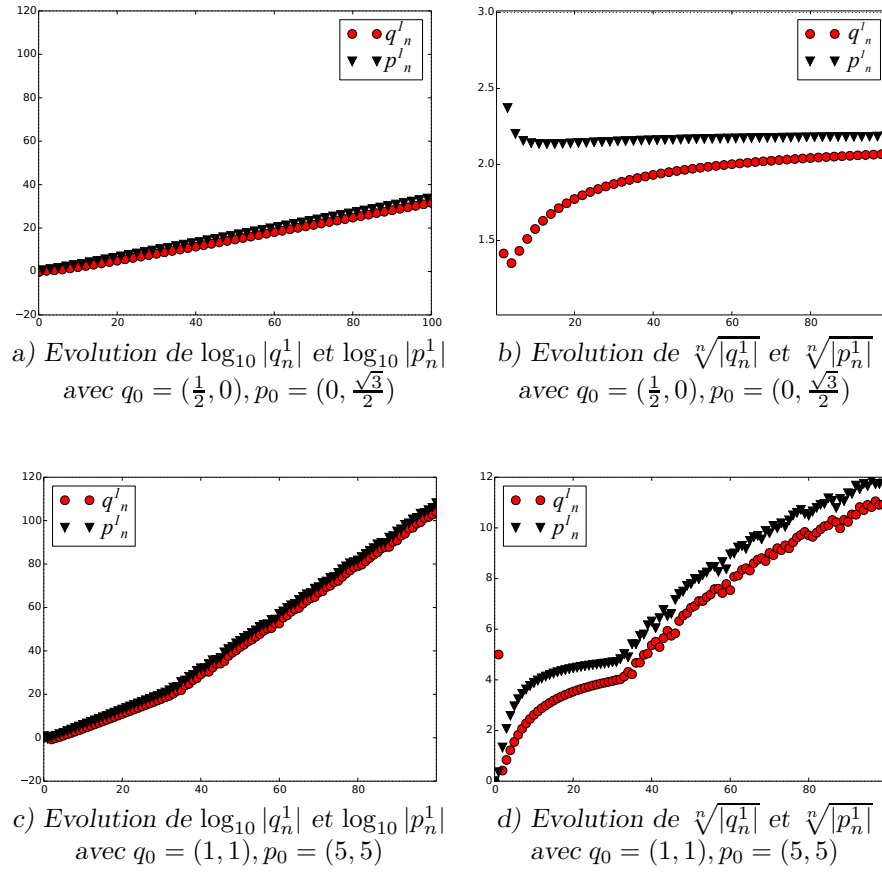


FIGURE 4.8 – Problème à deux corps. Evolution, en fonction de  $n$ , des termes  $q_n^1$  et  $p_n^1$  (à droite) et de  $\sqrt[3]{|q_n^1|}$  et  $\sqrt[3]{|p_n^1|}$  (à gauche), pour deux de conditions initiales différentes

## 4.4 Iso-spectralité

Pour notre premier test, on va revenir sur le système de Toda, décrit dans l'exemple 4.1.9. On va prendre deux exemples.

### 4.4.1 Système de Toda

On considère un système de Toda, formé de 3 particules. L'équation est :

$$\frac{dL}{dt} = ML - LM. \quad (4.42)$$

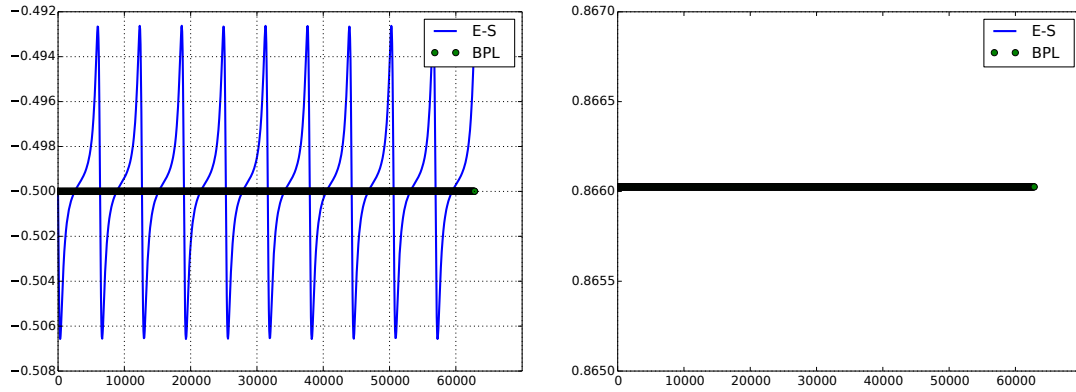


FIGURE 4.9 – *Problème à deux corps. Evolution du hamiltonien (à gauche) et du moment cinétique (à droite) en fonction du temps*

On prend comme condition initiale

$$L_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

On approxime numériquement la solution à l'ordre  $N = 8$  par sa somme de Borel (BPL) pour comparaison avec la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. Les traces de  $L$  et de  $L^2$  sont représentées sur la FIGURE 4.10. Conformément à notre étude théorique, la trace de  $\hat{L}^N$  est constante lorsqu'on applique la resommation. Avec le schéma BPL, on observe une variation négligeable de la trace pour  $L^2$ , de l'ordre de 0.00002% autour de la valeur initiale sur l'intervalle de temps  $[0, 1000]$ . Cependant, le schéma Rk4 présente une variation de l'ordre de 0.0001% sur le même intervalle. En fait, on peut montrer que, dû à la troncature, la trace de  $\text{tr}(\hat{L}^2)$  obtenue par le schéma BPL présente une erreur de l'ordre  $O(t^{N+1})$ .

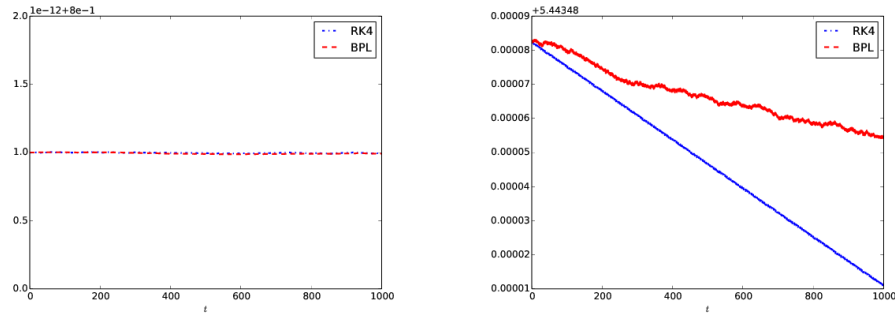


FIGURE 4.10 – *Evolution des traces en fonction du temps. A droite :  $\text{tr } L$ . A gauche :  $\text{tr } L^2$*

Ce test montre que le schéma BPL conserve l'iso-spectralité avec une grande précision. Dans ce test, la solution était analytique. Dans le test qui suit, on examine le cas où la solution présente une singularité.

#### 4.4.2 Exemple avec singularité

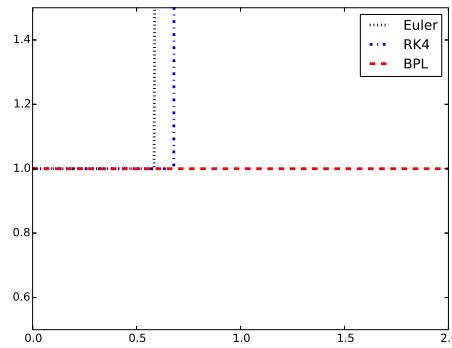
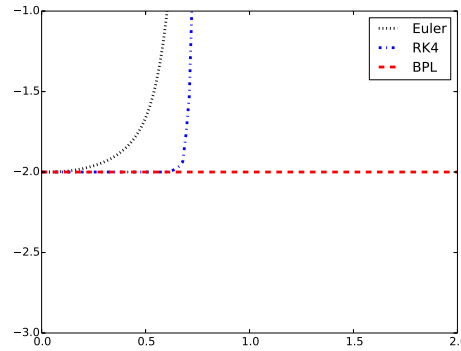
On considère un système de Toda formé par 2 particules. On prend comme condition initiale

$$L_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.44)$$

La solution exacte est

$$L(t) = \begin{pmatrix} \tan\left(t + \frac{\pi}{4}\right) & 1 \\ -\cos^{-2}\left(t + \frac{\pi}{4}\right) & -\tan\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

Les valeurs propres de  $L$  sont  $\lambda_1 = i$  et  $\lambda_2 = -i$ . Elles sont bien indépendantes du temps car le système est iso-spectral. La FIGURE 4.11 représente l'évolution numérique du module de  $\lambda_1$ , avec le schéma d'Euler explicite, le schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 et le schéma BPL. On observe que lorsque  $t$  s'approche de la valeur singulière  $\pi/4$ , le schéma d'Euler, puis le schéma de Runge-Kutta s'éloignent brutalement de la valeur théorique. En revanche, avec BPL, le comportement reste régulier. On peut faire le même constat pour la trace de  $L^2$ , comme le montre la FIGURE 4.12.

FIGURE 4.11 – *Module de  $\lambda_1$  en fonction du temps*FIGURE 4.12 –  *$\text{tr } L^2$  en fonction du temps*

La raison pour laquelle le schéma BPL n'explose pas comme les deux schémas classiques est qu'il n'utilise pas directement les valeurs de  $L$  (dont des coefficients tendent vers l'infini) mais son développement en série (dont les coefficients sont bornés).

## 4.5 Conclusion

On a vu dans ce chapitre quelques résultats encourageants, aussi bien théoriques que numériques, sur les propriétés du schéma BPL. Ces résultats sont d'une grande importance pour la résolution numérique d'un problème sur un grand intervalle de



---

temps. Fort de ces résultats, on applique le schéma BPL à la résolution d'équations aux dérivées partielles dans le chapitre suivant.

## Chapitre 5

# Application aux équations aux dérivées partielles

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la résolution numérique de quelques équations de la mécanique des fluides, à savoir l'équation de la chaleur, l'équation de Burgers, et les équations de Navier-Stokes. Notons qu'Hamdouni et Razafindralandy ont déjà traité l'équation de la chaleur et l'équation de Burgers en une dimension dans [RH13] avec une discrétisation spatiale en différences finies. Dans cet article, ils ont analysé la rapidité de l'algorithme BPL pour la résolution des équations sur de longs intervalles de temps. Ils ont montré en particulier que le pas de temps de l'algorithme BPL pouvait être beaucoup plus grand (entre quelque dizaines et quelques centaines de fois plus grand) que le pas de temps limite pour la stabilité d'un schéma d'Euler explicite. Ces résultats seront rappelés plus tard. Dans cette thèse, on s'intéresse à l'extension au cas bidimensionnel. Par ailleurs, pour traiter le cas des géométries complexes, on utilise une discrétisation par éléments finis.

La théorie de la resommation a été étendue par beaucoup d'auteurs à différents types d'équations aux dérivées partielles (EDP) [Yon90, Miy91, MH92, Ō94, GT98, Ō00, Shi01, Bal04]. Les questions qui se posent le plus souvent dans leurs travaux sont :

- Etant donnée une EDP, est-ce que toute série solution formelle est de Gevrey ?
- Si oui, quel est l'ordre de Gevrey maxima ?

— Comment généraliser la notion de polygone de Newton pour “lire” l’indice Gevrey ?

A l’heure actuelle, il n’y a pas encore à notre connaissance de résultat qui unifie toutes les EDP. En revanche, pour les équations de la mécanique des fluides qu’on a citées plus haut, on sait que la solution série formelle est sommable [LMS99, Bal99, Lys09b, CLT08, Mic12] dans des cas assez généraux.

## 5.1 Etudes théoriques sur l’équation de la chaleur

Rappelons d’abord quelques résultats intéressants dans le cas unidimensionnel.

### 5.1.1 Rappels bibliographiques en 1D

Considérons l’équation de la chaleur 1D

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{dans } \mathbb{C}^2 \\ u(t=0, x) = u_0(x). \end{cases} \quad (5.1)$$

En cherchant une solution formelle

$$\hat{u}(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) t^n, \quad (5.2)$$

et en notant que  $u_0^{(n)}(x)$  est la  $n^{\text{e}}$  dérivée de  $u_0$  par rapport à  $x$ , on trouve que

$$u_n(x) = \frac{u_0^{(2n)}(x)}{n!}. \quad (5.3)$$

La série (5.2) est convergente si  $u_0$  est une fonction entière à croissance au plus exponentielle d’ordre 2 [LMS99], c-à-d

$$|u_0(x)| \leq C e^{A|x|^2}, \quad x \in \mathbb{C}.$$

Mais dans le cas général, la série (5.2) diverge. C’est par exemple le cas lorsque

$$u_0(x) = \frac{1}{1-x} \quad (5.4)$$

car ainsi

$$u_n(x) = \frac{(2n)!}{n!} \frac{1}{(1-x)^{2n+1}}.$$

Lutz et ses collaborateurs ont montré dans [LMS99] que si  $u_0$  est analytique dans le double cone (voir FIGURE 5.1)

$$S(d_\theta, \alpha, \infty) \cup S(d_{\pi+\theta}, \alpha, \infty)$$

et y est à croissance au plus exponentielle d'ordre 2 vers l'infini, alors la solution formelle (5.2)-(5.3) est 1-sommable dans la direction  $d_{2\theta}$ . Sa 1-somme de Borel est analytique dans le secteur  $S(d_{2\theta}, 2\alpha + \pi, \rho)$  pour un certain  $\rho > 0$ . Balser a étendu

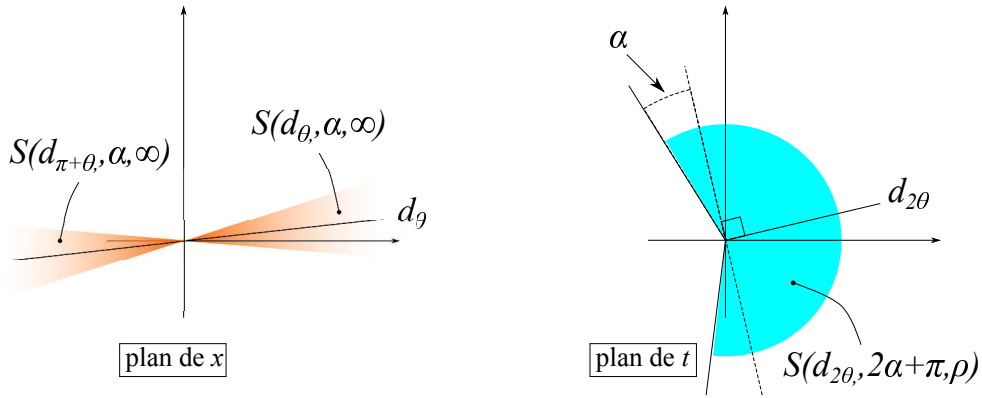


FIGURE 5.1 – A gauche : domaine d'analyticité de  $u_0$ . A droite, domaine d'analyticité de  $\mathcal{S}\hat{u}(t, x)$

ce résultat dans [Bal99] à d'autres types de conditions sur  $u_0$ . On peut montrer que, dans le cas général, la série (5.2) est de Gevrey d'indice au moins  $k = 1$ , ce qui veut dire que si elle diverge, elle ne diverge pas plus vite qu'une série de Gevrey 1. Michalik a par ailleurs examiné le cas multi-dimensionnel [Mic12] et les cas semi-linéaires avec Lysik [LM08].

Dans toutes ces études, on considère généralement le cas où  $x$  appartient à  $\mathbb{R}^m$  ou  $\mathbb{C}^m$ . Or dans la pratique, le domaine spatial est borné. Ce fait peut avoir des répercussions non négligeables et engendrer des problèmes que nous mentionnerons plus tard. Pour l'instant, considérons le cas bidimensionnel dans un domaine borné.

### 5.1.2 Cas bidimensionnel

Soit l'équation de la chaleur 2D

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \Delta u \quad \text{dans } \Omega \quad (5.5)$$

associée à une condition aux limites

$$u|_{\partial\Omega} = g \quad (5.6)$$

et une condition initiale

$$u(t = 0, x, y) = u_0(x, y). \quad (5.7)$$

Comme dans le cas unidimensionnel, on peut facilement trouver des conditions initiales pour lesquelles la solution formelle est divergente, même si  $u_0$  est analytique dans  $\Omega$ . Considérons l'exemple suivant :

$$\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[$$

Quitte à faire un changement de variable sur le temps, on prendra  $\nu = 1$ . On prend la condition initiale

$$u_0(x, y) = \varphi(x)\varphi(y), \quad (5.8)$$

avec

$$\varphi : x \mapsto \frac{1}{1+x}.$$

Voici le résultat suivant :

**Proposition 5.1.1.** *La solution formelle*

$$\hat{u}(t, x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y) t^n. \quad (5.9)$$

*de l'équation (5.5) est de Gevrey d'indice 1.*

PREUVE. Sans perte de généralité, on peut supposer que  $\nu = 1$ . En injectant (5.9) dans l'équation, on a :

$$u_n = \frac{1}{n} \Delta u_{n-1} = \frac{1}{n!} \Delta u_0, \quad n \geq 1$$

dans  $\Omega$ . En utilisant (5.8),

$$u_n(x, y) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \varphi^{(2(n-k))}(x) \varphi^{(2k)}(y).$$

Et puisque  $\varphi^{(n)}(x) = (-1)^n n! [\varphi(x)]^{n+1}$ ,

$$u_n(x, y) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [2(n-k)]! [2k]! [\varphi(x)]^{2(n-k)+1} [\varphi(y)]^{2k+1}.$$

Sachant que

$$\max_{(x,y) \in \Omega} \varphi(x) \varphi(y) = 1,$$

On a l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} \max_{(x,y) \in \Omega} |u_n(x, y)| &\leq \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [2(n-k)]! [2k]! \\ &\leq \frac{1}{n!} 2^n (2n)! \sim (2e)^n n! \end{aligned}$$

où l'on a utilisé les relations suivantes :

$$\begin{aligned} [2(n-k)]! [2k]! &\leq [2n]! \quad k > 0, \\ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} &= 2^n, \\ (2n)! &\sim e^n (n!)^2. \end{aligned}$$

■

Dans toute la suite, on supposera que la solution formelle est 1-sommable dans la direction  $d = \mathbb{R}^+$ . On pourra alors utiliser le schéma BPL exposé précédemment, associé à une discrétisation spatiale.

Avant d'exposer nos résultats dans le cas bidimensionnel et avec une discrétisation par éléments finis, on va rappeler un des résultats obtenus par Hamdouni et Razafindralandy dans [RH13]. On se limitera à l'équation de la chaleur.

## 5.2 Simulation numérique en 1D

Dans cette section, on prend  $\nu = 1$ . On choisit comme solution exacte la fonction :

$$u(t, x) = e^{-t} \sin x. \quad (5.10)$$

Le domaine est  $\Omega = [0, \pi]$ .

Dans ce rappel, l'équation est discrétisée spatialement par différences finies centrées, sur un maillage uniforme. L'équation semi-discrétisée est

$$\begin{cases} \frac{du^i}{dt} = \frac{u^{i-1} - 2u^i + u^{i+1}}{\Delta x^2}, & i = 1, m \\ u^0 = 0, \quad u^{m+1} = 0, \end{cases} \quad (5.11)$$

où les  $u^i$  sont les valeurs aux nœuds et  $m$  le nombre de nœuds internes.

On prend d'abord un maillage avec  $m = 16$ . La série est tronquée à l'ordre  $N = 10$ . La solution obtenue par le schéma BPL en  $t \simeq 3s$  est représentée sur la FIGURE 5.2. On observe un bon accord avec la solution exacte.

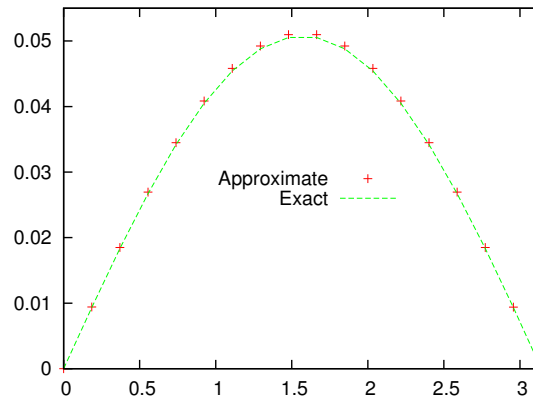


FIGURE 5.2 – Solution exacte et solution approchée à  $t = 2.98s$

On va maintenant s'intéresser à la taille du pas de temps. On effectue des tests avec  $N = 10$  et  $N = 20$  comme ordre de troncature de la série. Les résultats sont représentés sur la TABLE 5.1. On peut constater que le premier pas de temps est

beaucoup plus grand que les suivants. A partir de la deuxième itération, le pas de temps se stabilise. On ne représente sur la TABLE 5.1 que quelques valeurs. Dans la dernière colonne, on a inscrit la moyenne des 20 premiers pas de temps.

Le schéma BPL étant explicite (aucune inversion de matrice n'est requise), on va le comparer avec le schéma d'Euler explicite. Le pas de temps maximal autorisé pour respecter la condition de stabilité du schéma d'Euler explicite est

$$\Delta t_{Euler} = 1.7 \cdot 10^{-3}$$

pour  $m = 16$ . On observe alors que le pas de temps obtenu par BPL est entre 40 et 800 fois plus grand que le pas de temps limite  $\Delta t_{Euler}$  de la méthode d'Euler quand  $N = 10$ , et entre 95 et 900 fois plus grand que  $\Delta t_{Euler}$  lorsqu'on tronque la série à un ordre plus élevé  $N = 20$ .

	Itération 1	Itération 2	Itération 3	Itération 4	Moyenne (20)
<b><math>N = 10</math></b>	1.4	$8.9 \cdot 10^{-2}$	$9.6 \cdot 10^{-2}$	$9.6 \cdot 10^{-2}$	$1.6 \cdot 10^{-1}$
<b><math>N = 20</math></b>	1.8	$1.8 \cdot 10^{-1}$	$1.9 \cdot 10^{-1}$	$1.9 \cdot 10^{-1}$	$2.7 \cdot 10^{-1}$

TABLE 5.1 – Pas de temps avec BPL pour  $m = 16$

La courbe de gauche de la FIGURE 5.3 représente la variation du pas de temps moyen lorsqu'on change l'ordre de troncature  $N$ . On y observe une évolution pratiquement linéaire avec  $N$ . Et si on fixe  $N$  à 10, la courbe de droite de la FIGURE 5.3 montre que le pas de temps BPL décroît de manière quadratique avec la taille du maillage.

Ces tests, tirés de [RH13], montrent que le schéma BPL est bien adapté pour la simulation sur un grand intervalle de temps, dans le sens où il permet d'avoir de grands pas de temps, tout en étant un algorithme explicite. Des tests sur l'équation de Burgers, toujours en 1D et avec une discrétisation par différences finies, peuvent être trouvés dans le même article. Dans cette thèse, on s'intéresse plus particulièrement au cas bidimensionnel et avec une discrétisation par éléments finis.



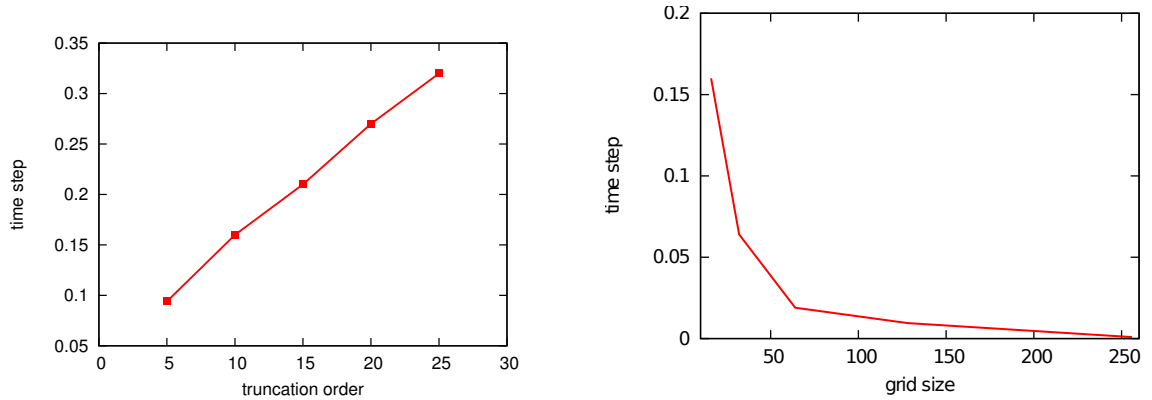


FIGURE 5.3 – Evolution du pas de temps avec l'ordre de troncature (à gauche) et avec la taille du maillage (à droite)

### 5.3 Simulations numériques en 2D

On reprend l'équation de la chaleur avec éventuellement un terme source :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \Delta u + f \quad \text{dans } \Omega. \quad (5.12)$$

Pour trouver une approximation de la solution  $u(t, x)$  en utilisant le schéma BPL, on écrit la formulation faible de l'équation. Ensuite, on décompose la solution en série formelle temporelle pour obtenir les équations qui permettent, après une discrétisation spatiale, de trouver une approximation des termes de la série. Ces termes sont employés par le schéma BPL afin de donner une approximation continue de la solution dans le temps et une approximation discrète dans  $\Omega$ .

#### 5.3.1 Discrétisation spatiale

Considérons, quitte à faire une translation du problème qui nous ramène à des conditions aux limites homogènes, la formulation faible du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u(t) \in W = L^2(0, T; V) \text{ t.q.} \\ \frac{d}{dt}(u(t), v) + \mathcal{L}(u(t), v) = (f(t), v), \quad \forall v \in V \end{array} \right. \quad (5.13)$$

$V$  est un espace fonctionnel. Le choix de  $V$  dépend du problème. Il peut être l'espace  $H_0^1(\Omega)$ .

La discrétisation spatiale sera faite avec la méthode des éléments finis. On utilisera des éléments triangulaires P1, de degrés 1 et des éléments quadrilatères Q1 [ADM11]. Les formes et les fonctions de forme des éléments sont résumées dans la TABLE 5.2. On présente aussi dans ce tableau les éléments de degrés 2 (P2 et Q2) qui seront utilisés ultérieurement. Tous les maillages seront structurés et uniformes.

On note  $h$  la taille caractéristique d'un élément,  $\Omega^h$  l'ensemble des éléments finis et  $\partial\Omega^h$  l'ensemble des éléments de bord. Soient  $V^h$  l'approximation de l'espace  $V$  et  $W^h$  celle de l'espace  $L^2(0, T, V^h)$ . La forme semi-discrétisée de l'équation (5.13) est donnée par :

$$\frac{d}{dt}(u^h(t), v^h) + \mathcal{L}(u^h(t), v^h) = (f^h(t), v^h) \quad \forall v^h \in V^h. \quad (5.14)$$

Soit  $\Omega_e$  un élément de la triangulation  $\Omega^h$  de  $\Omega$  et soit  $\langle N_e \rangle$  les polynômes d'interpolations qui forment la base canonique associée à l'élément  $\Omega_e$ . Alors

$$u^h(t)|_{\Omega_e} = \langle N_e \rangle \{u_e^h(t)\}$$

et

$$\begin{aligned} (u^h(t), v^h) &= \sum_{e=1}^E \int_{\Omega_e} {}^T\{v_e^h\} {}^T\langle N_e \rangle \langle N_e \rangle dx \{u_e^h(t)\} \\ &= \sum_{e=1}^E {}^T\{v_e^h\} \underbrace{\int_{\Omega_e} {}^T\langle N_e \rangle \langle N_e \rangle dx}_{M_e} \{u_e^h(t)\} \end{aligned}$$

Après assemblage, en utilisant un élément de référence, on se ramène à une équation semi-discrète de la forme :

$$M \frac{du^h}{dt} = Ku^h + Mf^h \quad \text{sur } \Omega^h$$

où  $M$  est la matrice de masse assemblée et qui est associée à l'opérateur  $(u, v)$ .  $K$  est la matrice de rigidité et qui est associée à l'opérateur  $-\mathcal{L}$  tandis que  $u^h$  est le vecteur contenant les valeurs aux nœuds. De même  $f^h$  est le terme source discrétisé.

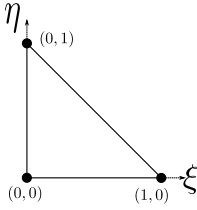
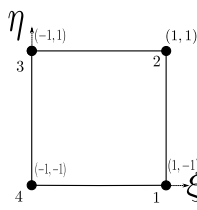
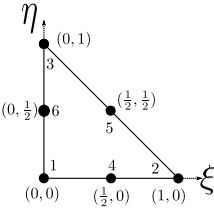
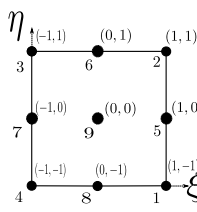
 $\begin{aligned}\phi_1(\xi, \eta) &= 1 - \xi - \eta \\ \phi_2(\xi, \eta) &= \xi \\ \phi_3(\xi, \eta) &= \eta\end{aligned}$ <p><i>Un élément P1</i></p>	 $\begin{aligned}\phi_1(\xi, \eta) &= (1 - \xi)(1 - \eta)/4 \\ \phi_2(\xi, \eta) &= (1 + \xi)(1 - \eta)/4 \\ \phi_3(\xi, \eta) &= (1 + \xi)(1 + \eta)/4 \\ \phi_4(\xi, \eta) &= (1 - \xi)(1 + \eta)/4\end{aligned}$ <p><i>Un élément Q1</i></p>
 $\begin{aligned}\phi_1(\xi, \eta) &= 1 - 3(\xi + \eta) + 2(\xi + \eta)^2 \\ \phi_2(\xi, \eta) &= \xi(2\xi - 1) \\ \phi_3(\xi, \eta) &= \eta(2\eta - 1) \\ \phi_4(\xi, \eta) &= 4\xi(1 - \xi - \eta) \\ \phi_5(\xi, \eta) &= 4\xi\eta \\ \phi_6(\xi, \eta) &= 4\eta(1 - \xi - \eta)\end{aligned}$ <p><i>Un élément P2</i></p>	 $\begin{aligned}\phi_1(\xi, \eta) &= \xi\eta(\xi - 1)(\eta - 1)/4 \\ \phi_2(\xi, \eta) &= \xi\eta(\xi + 1)(\eta - 1)/4 \\ \phi_3(\xi, \eta) &= \xi\eta(\xi + 1)(\eta + 1)/4 \\ \phi_4(\xi, \eta) &= \xi\eta(\xi - 1)(\eta + 1)/4 \\ \phi_5(\xi, \eta) &= (1 - \xi^2)\eta(\eta - 1)/2 \\ \phi_6(\xi, \eta) &= \xi(\xi + 1)(1 - \eta^2)/2 \\ \phi_7(\xi, \eta) &= (1 - \xi^2)\eta(\eta + 1)/2 \\ \phi_8(\xi, \eta) &= \xi(\xi - 1)(1 - \eta^2)/2 \\ \phi_9(\xi, \eta) &= (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)\end{aligned}$ <p><i>Un élément Q2</i></p>

TABLE 5.2 – Fonctions de forme de quelques éléments finis bidimensionnels

### 5.3.2 Intégration temporelle

On décompose la solution sous forme d'une série temporelle :

$$u(t, x) = \sum_n u_n(x) t^n. \quad (5.15)$$

où  $u_n(x) \in V$ . On décompose également les données :

$$f(t) = \sum_n f_n t^n \quad (5.16)$$

Les termes de la série se calculent alors récursivement par :

$$n(u_n, v) + a(u_{n-1}, v) = (f_{n-1}, v) \quad \forall v \in V \quad (5.17)$$

Leur approximation  $u_n^h$  aux nœuds de la triangulation est donnée par la formulation discrète suivante :

$$u_n^h = \frac{1}{n} (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} u_{n-1}^h + f_n^h) \quad \text{sur } \Omega^h \quad (5.18)$$

où  $\mathbf{M}$  est la matrice de masse,  $\mathbf{K}$  est la matrice de rigidité. Notons que le schéma est explicite, dans le sens où une seule inversion de matrice est requise pour toute la durée de la simulation.

On applique ensuite le schéma BPL. Les approximants de Padé sont calculés composante par composante. Pour éviter les problèmes d'unicité de l'approximant (voir section 6.2.4), on utilise la réduction par SVD [GGT13].

Pour bien identifier les sources des éventuels problèmes, deux tests numériques seront présentés. Dans le premier, la solution exacte est une gaussienne. Le bord sera assez loin des points où on évalue  $u(t, x, y)$ , de manière à ce que son effet soit négligeable. Dans le deuxième test, on s'intéressera à l'influence du bord et on proposera une stratégie.

### 5.3.3 Premier test numérique

On choisit les données de telle sorte que la solution exacte soit une gaussienne qui décroît exponentiellement dans le temps :

$$u(t, x, y) = e^{-at} e^{-\kappa(x^2+y^2)} \quad (5.19)$$

Le domaine de calcul est  $\Omega = ]-8,8[ \times ]-8,8[$ . On fixe  $\nu = 0.1$ ,  $a = 2\nu\pi^2$  et  $\kappa = 0.1$ . La série  $\hat{u}^h$  est tronquée à l'ordre  $N = 6$ .

On compare d'abord les termes  $u_n^h$  de la série  $\hat{u}^h$  obtenus par calcul avec les valeurs exactes. La FIGURE 5.4 montre les termes  $u_1^h$ ,  $u_2^h$  et  $u_6^h$ . On voit qu'on arrive à bien prédire tous ces termes, aussi bien avec des éléments P1 qu'avec des éléments Q1.

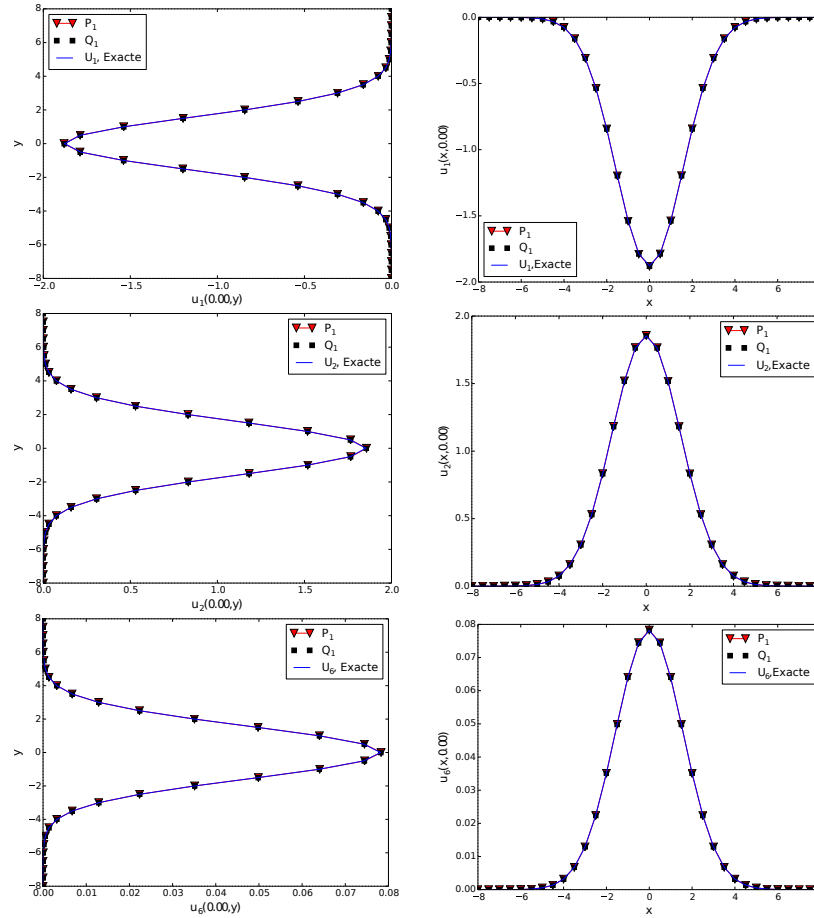


FIGURE 5.4 – Coupe de  $u_1^h$ ,  $u_2^h$  et  $u_6^h$  (de haut en bas) le long de  $x = 0$  (à gauche) et de  $y = 0$  (à droite)

On applique ensuite l'algorithme BPL et la continuation jusqu'à des grandes valeurs de  $t$ . La solution décroissant très rapidement avec le temps, on ne montrera que les figures correspondant à  $t = 1$ . On peut voir sur la FIGURE 5.5 une comparaison

entre la solution approximée par BPL et la solution exacte. On peut constater une très bonne cohérence avec la solution exacte.

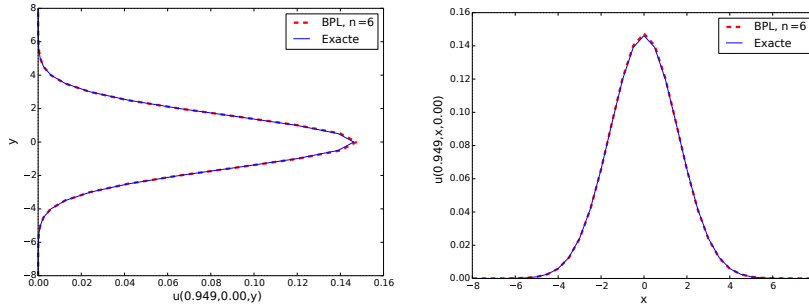


FIGURE 5.5 – Coupes de la solution le long de  $x = 0$  (à gauche) et de  $y = 0$  (à droite)

On peut conclure que l'algorithme BPL arrive à bien évaluer les termes de la série, ainsi que la solution du problème. On va maintenant se concentrer sur l'effet du bord.

#### 5.3.4 Deuxième test

Prenons comme domaine  $\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[$  et  $\nu = 0.1$ . On choisit comme solution exacte

$$u_0(x, y) = e^{-\nu\pi^2 t} \sin(\pi x) \sin(\pi y). \quad (5.20)$$

On discrétise le domaine en 32 points dans chaque discrétisation et on tronque la série temporelle à  $N = 6$  termes.

La FIGURE 5.6 montre des coupes de  $u_n^h$ , pour  $n = 1, 2, 3$ , comparées avec le développement en série de la solution exacte (5.20). On y observe que les éléments P1 et Q1 reproduisent assez bien le premier terme  $u_1^h$  de la série. Le deuxième terme est aussi bien reproduit. Cependant, dans le cas de l'élément P1, une légère erreur apparaît proche du bord. Cette erreur proche du bord s'amplifie, si bien que  $u_3^h$  n'est plus prédit correctement avec les éléments P1. Avec les éléments Q1, le problème au bord est limité.

Pour contrôler le problème au bord, on applique une condensation de la matrice de masse. Plusieurs méthodes existent pour condenser  $\mathbf{M}$ . Celle qu'on utilise est la plus simple, qui consiste à rendre  $\mathbf{M}$  diagonal. La valeur à la  $i$ -ème ligne et  $j$ -ème

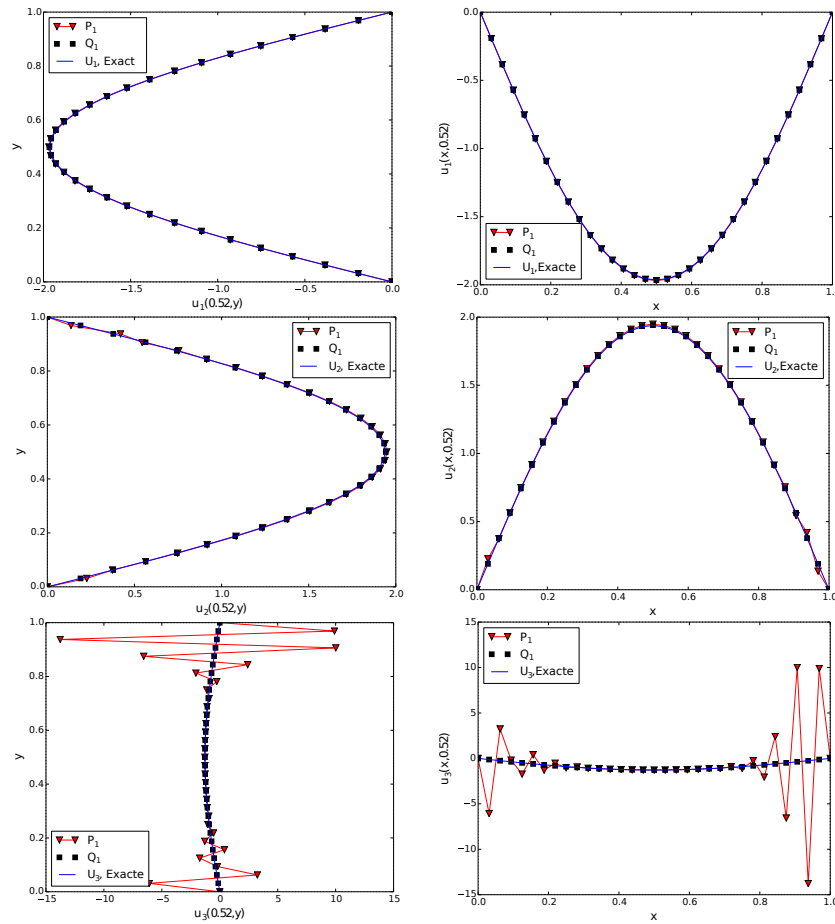


FIGURE 5.6 – Coupe de  $u_1^h$ ,  $u_2^h$  et  $u_3^h$  (de haut en bas) le long de  $x = 0.5$  (à gauche) et de  $y = 0.5$  (à droite)

colonne de la matrice condensée est alors la somme des éléments de la  $i$ -ème ligne de la matrice initiale.

On peut voir sur la FIGURE 5.7 que cela améliore nettement les résultats sur  $u_2^h$  et  $u_3^h$ . En effet, on ne distingue plus les erreurs sur le bord. En revanche, lorsqu'on monte en  $n$ , les éléments  $P_1$  introduisent des oscillations. Avec les éléments  $Q_1$ , on remarque une erreur sur  $u_6^h$  par rapport aux coefficients de la solution exacte  $u_6$ , mais cette erreur reste raisonnable.

Dans la TABLE 5.3, on présente le nombre de continuations qu'il faut faire pour

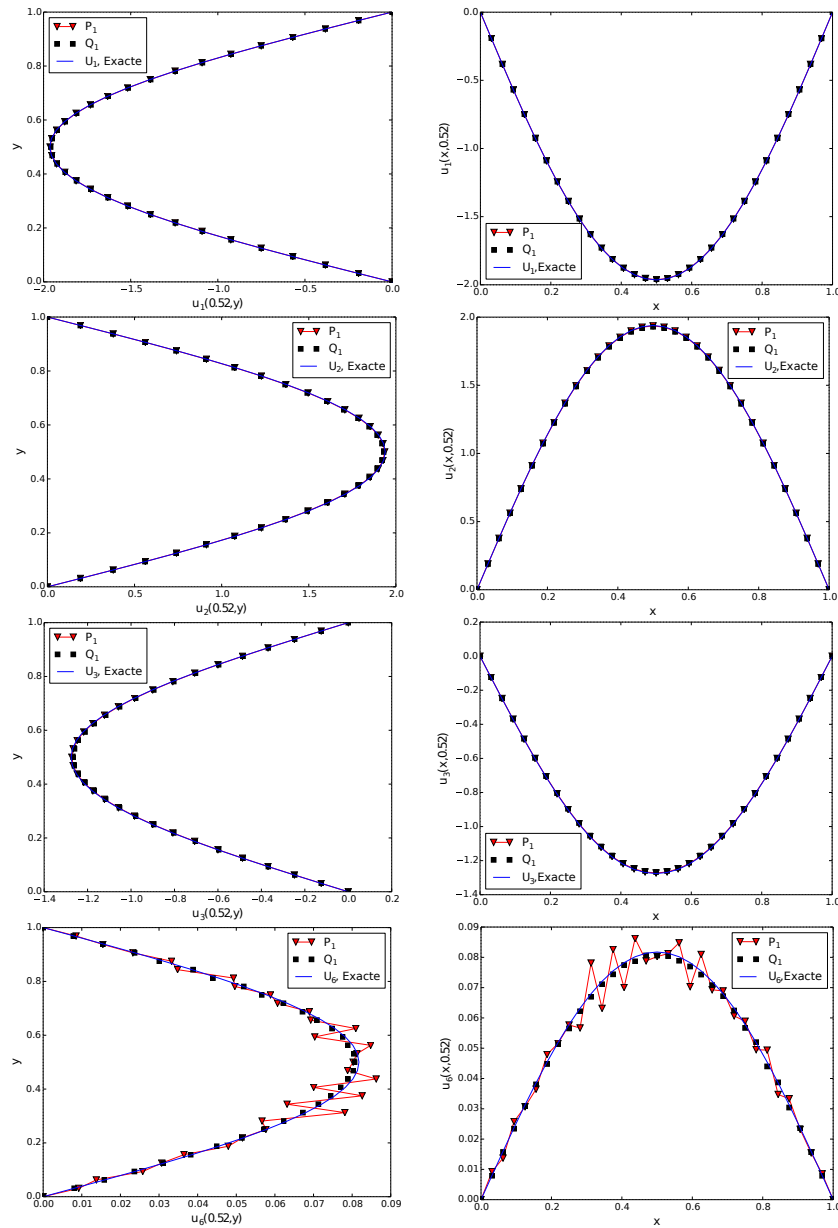


FIGURE 5.7 – Coupe de  $u_1^h$ ,  $u_2^h$ ,  $u_3^h$  et  $u_6^h$  (de haut en bas) le long de  $x = 0.5$  (à gauche) et de  $y = 0.5$  (à droite), avec condensation de la matrice  $M$

atteindre  $t = 1$ , ainsi que le temps de simulation avec les éléments  $P_1$  et  $Q_1$ . Comme on pouvait s'y attendre, il faut moins de continuation avec les éléments  $Q_1$ . En effet,



meilleures sont les prédictions sur les termes de la série, plus loin on peut aller en temps. On remarque aussi que la condensation fait gagner en nombre de continuations et en temps de calcul.

		Nombre de pas	Temps CPU
$P_1$	Sans condensation	739	1365 s
	Avec condensation	124	310 s
$Q_1$	Sans condensation	546	1152 s
	Avec condensation	62	135 s

TABLE 5.3 – Nombre de continuations et temps de simulation avec les éléments  $P_1$  et  $Q_1$

Au vu de ces résultats, on utilisera dans la suite de ce test les éléments  $Q_1$ , avec condensation. On applique le schéma BPL pour calculer l'évolution de la solution. La FIGURE 5.8 présente les coupes pour  $x = 0.5$  et  $y = 0.5$  à  $t = 1$ . On voit qu'on a une bonne concordance avec la solution exacte. La FIGURE 5.9 montre les iso-valeurs de la solution approchée.

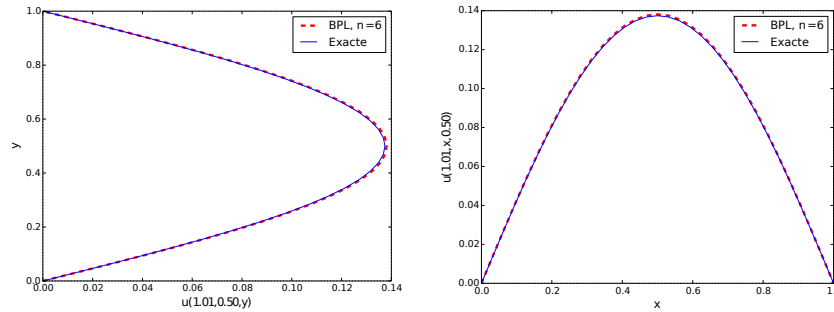


FIGURE 5.8 – Coupe de la solution en  $x = 0.5$  (à gauche) et  $y = 0.5$  (à droite)

On peut donc conclure de ce test que le bord peut affecter négativement le résultat des simulations lorsqu'on utilise des éléments  $P_1$ . On a donné deux pistes pour réduire cet effet. La première est d'utiliser des éléments quadrangulaires. La deuxième, qui permet également d'améliorer et d'accélérer le calcul, est d'utiliser une technique standard de condensation.

On va maintenant appliquer notre algorithme à l'équation de Burgers. Ce qu'on souhaite voir est l'effet de la non-linéarité. Pour ne pas introduire une interférence

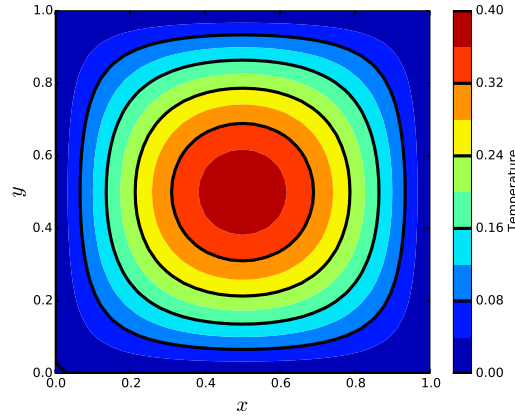


FIGURE 5.9 – Les iso-contours de la solution numérique obtenus par le schéma BPL à  $t = 1$

avec des effets de bord, on va choisir une solution exacte qui décroît assez rapidement loin du centre du domaine.

## 5.4 Equation de Burgers

Dans le cas monodimensionnel, Lysik a montré que la solution formelle de l'équation de Burgers est généralement divergente, et est de Gevrey 1 [Lys09b]. Il a également donné un exemple de condition initiale pour laquelle la solution formelle est d'indice Gevrey exactement 1. Dans cette section, on s'intéresse au cas bidimensionnel. En s'appuyant sur les résultats de Lysik, on peut supposer que les séries qui interviendront ne divergent pas plus vite qu'une série de Gevrey d'indice 1, et qu'on peut appliquer sur elles la resommation.

On considère l'équation de Burgers bidimensionnelle avec un terme source  $f$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = \nu \Delta u + f & \text{dans } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases} \quad (5.21)$$

où  $u = (u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2$ , associée à la condition initiale

$$u(t = 0, x, y) = u_0(x, y).$$

Pour les simulations, on utilise un maillage composé d'éléments Q1 et de 32 nœuds dans chaque direction d'espace. Pour les conditions aux bords, on applique une translation du problème. Après discrétisation spatiale, l'équation devient :

$$\begin{cases} \mathbf{M} \frac{du^h}{dt} + \mathbf{N}(u^h, u^h) = \nu \mathbf{K} u^h + \mathbf{M} f^h & \text{sur } \Omega^h, \\ u^h(t = 0) = u_0^h \end{cases} \quad (5.22)$$

où on a noté  $\mathbf{N}$  l'opérateur non linéaire discrétisé correspondant au terme convectif.  $\mathbf{K}$  est la matrice de rigidité et  $\mathbf{M}$  est la matrice de masse, qui sera condensée. On décompose ensuite l'inconnue  $u^h$ , la fonction  $f^h$  ainsi que  $g^h$  en séries temporelles :

$$\hat{u}^h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^h t^n, \quad \hat{f}^h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^h t^n, \quad \hat{g}^h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n^h t^n.$$

Les termes de la série s'obtiennent alors par récurrence :

$$(n+1)\mathbf{M}u_{n+1}^h = - \sum_{k=0}^n \mathbf{N}(u_{n-k}^h, u_k^h) + \nu \mathbf{K} u_n^h + \mathbf{M} f_n^h \quad \text{sur } \Omega^h, \quad (5.23)$$

$n \geq 1$ . Comme on peut le voir, l'équation non linéaire (5.22) est remplacée par une cascade d'équations linéaires (5.23).

La série  $\hat{u}^h(t)$  sera tronquée à l'ordre  $N = 6$ . L'algorithme BPL est appliqué pour resommer  $\hat{u}^h(t)$ , et on utilise la technique de continuation pour atteindre les grandes valeurs de  $t$ .

Pour la simulation numérique, on choisit les fonctions  $f$ ,  $g$  et  $u_0$  de telle sorte que la solution exacte soit

$$u^1 = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad u^2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

avec

$$\varphi(t, x, y) = e^{-at} e^{-\omega(x^2 + y^2)}.$$

On prend  $\nu = 0.1$ ,  $a = 2\nu\pi^2$  et  $\omega = 0.1$ .

La FIGURE 5.10 présente des coupes des deux composantes de la solution approchée à  $t = 1$ . On peut voir une très bonne adéquation avec la solution exacte, malgré de légers décalages et sous estimation des pics sur certains graphiques. La FIGURE 5.11 montre les iso-contours de la solution approchée dans les deux directions, et la FIGURE 5.12 montre le champ à  $t = 1$ .

Ce test montre que la non-linéarité semble ne pas affecter la qualité du schéma BPL. Cela se comprend car la décomposition en série linéarise naturellement le problème d'origine.

Dans la prochaine section, on s'intéressera aux équations de Navier-Stokes, et particulièrement à la gestion de la pression.

## 5.5 Equations de Navier-Stokes

Costin a montré dans [CT06, CLT08] que la solution formelle des équations de Navier-Stokes est généralement divergente, mais est de Gevrey d'indice 1 et Borel sommable. On peut donc appliquer le schéma d'intégration BPL.

On considère un fluide newtonien incompressible, de densité  $\rho=1$ , et de viscosité cinématique  $\nu$ . L'écoulement, de ce fluide, occupant un domaine borné bidimensionnel  $\Omega$ , est modélisé par les équations de Navier-Stokes :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(u \otimes u) = -\nabla p + \nu \Delta u + f \\ \operatorname{div} u = 0. \end{cases} \quad (5.24)$$

Dans ces équations,  $u = (u^1, u^2)$  désigne le champ de vitesses,  $p$  le champ de pression et  $f$  un terme source. On associe à ces équations une condition au bord

$$u|_{\partial\Omega} = g$$

et une condition initiale

$$u(t = 0, x, y) = u_0(x, y).$$

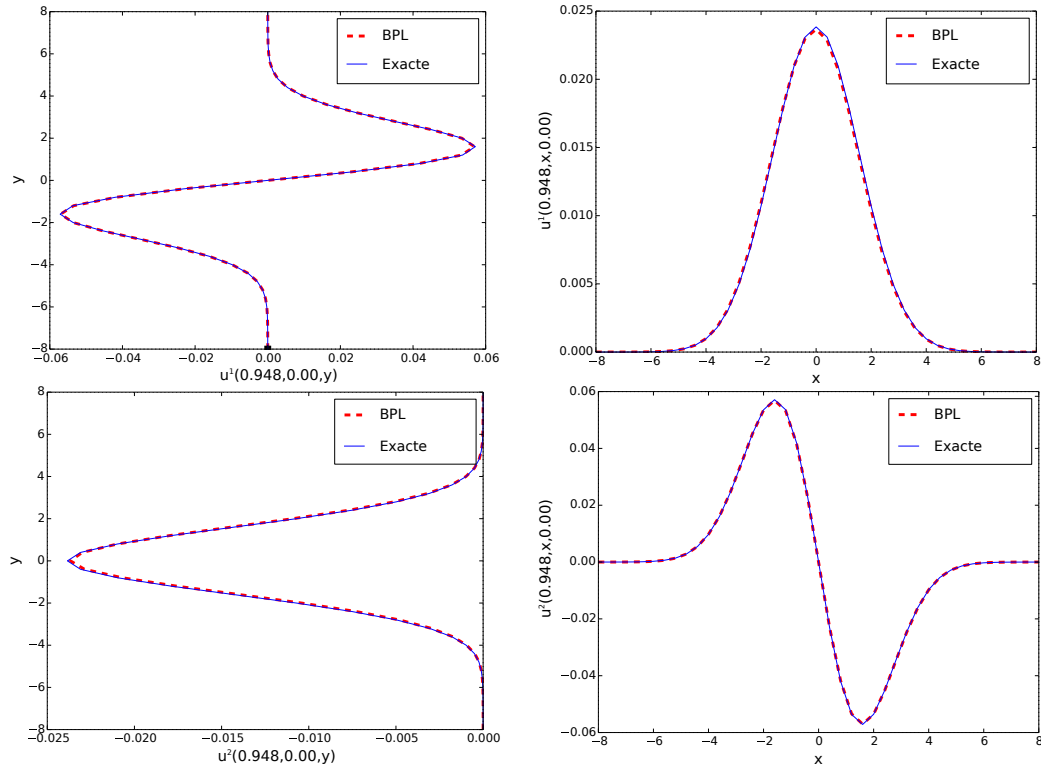


FIGURE 5.10 – Coupe de  $u^1$  et  $u^2$  (de haut en bas) le long de  $x = 0$  (à gauche) et de  $y = 0$  (à droite) à  $t = 1$

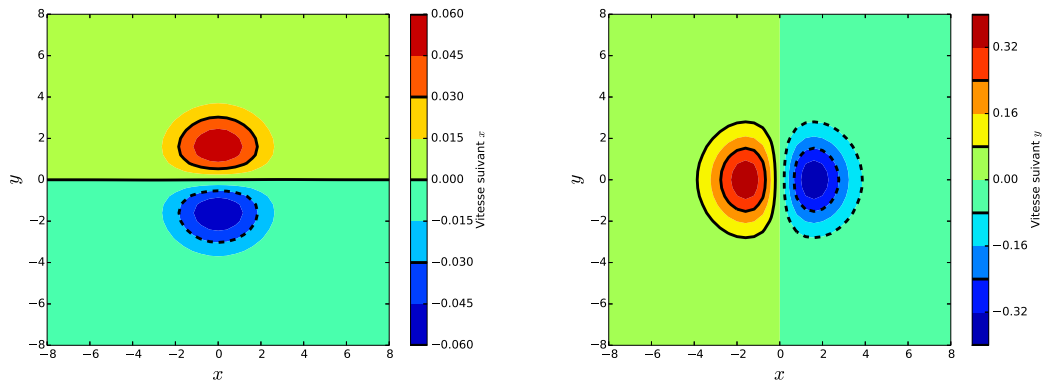
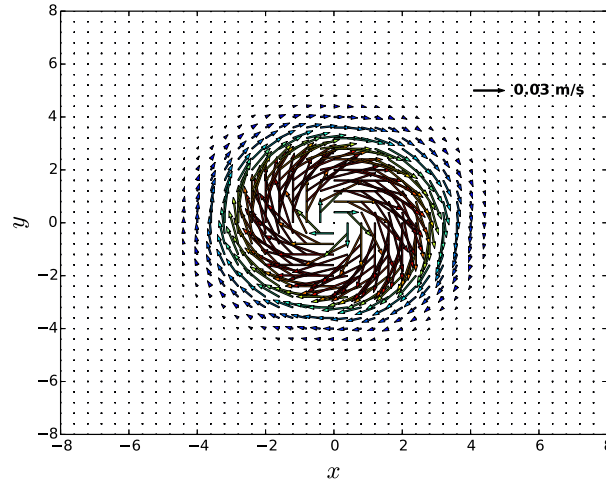


FIGURE 5.11 – Iso-contours de  $u^1$  (à gauche) et de  $u^2$  (à droite) en  $t = 1$

FIGURE 5.12 – *Le champ vectoriel à  $t = 1$* 

### 5.5.1 Algorithme de résolution

On peut, comme auparavant, discrétiser les équations spatialement puis décomposer en série. Mais cette fois, on va d'abord introduire le développement en série pour bien voir que le problème qu'on aura à résoudre est un problème de Darcy discrétisé.

On décompose les inconnues en séries temporelles :

$$\hat{u}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n, \quad \hat{p}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n,$$

ainsi que les données :

$$\hat{f}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n t^n, \quad \hat{g}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n t^n.$$

Lorsqu'on injecte ces développements dans les équations (5.24), on obtient la cascade

d'équations suivantes

$$\begin{cases} (n+1)u_{n+1} + \sum_{k=0}^n \operatorname{div}(u_{n-k} \otimes u_k) = -\nabla p_n + \nu \Delta u_n + f_n \\ \operatorname{div} u_n = 0. \end{cases} \quad (5.25)$$

Pour chaque  $n \geq 1$ , on est donc ramené à résoudre une équation de Darcy du type

$$\begin{cases} (n+1)u_{n+1} + \nabla p_n = F_n, \\ \operatorname{div} u_{n+1} = 0 \end{cases} \quad (5.26)$$

où  $F_n$  rassemble le terme convectif, le terme diffusif et le terme source à l'ordre  $n$ . Pour ce faire, on utilise un algorithme de prédiction-correction. On introduit une variable auxiliaire  $u_{n+1}^*$  définie par

$$(n+1)u_{n+1}^* = F_n. \quad (5.27)$$

Ensuite, en appliquant une divergence à la première équation de (5.26), on aboutit à l'équation de Poisson :

$$\Delta p_n = -(n+1) \operatorname{div} u_{n+1}^*, \quad (5.28)$$

associée à la condition au limite

$$\nabla p_n \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (5.29)$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale à  $\partial\Omega$ . Enfin, on corrige le champ de vitesse par :

$$u_{n+1} = u_{n+1}^* - \frac{1}{n+1} \nabla p_n \quad (5.30)$$

en imposant les conditions aux limites

$$u_{n+1}|_{\partial\Omega} = g_{n+1}. \quad (5.31)$$

Ce sont donc les équations (5.27)-(5.31) qui seront discrétisées. Pour assurer la condition inf-sup, on utilise les éléments Q2 en vitesse et Q1 en pression (voir TABLE

5.2). Après discrétisation spatiale, on obtient des équations de ce type qu'il faudra résoudre :

$$\begin{cases} (n+1)\mathbf{M}u_{n+1}^{*h} = -\sum_{k=0}^n \mathbf{N}(u_{n-k}^h, u_n^h) + \nu \mathbf{K}u_n^h + \mathbf{M}f_n^h, \\ \mathbf{G}^t \mathbf{G}p_n^h = -(n+1)\mathbf{G}^t u_{n+1}^{*h}, \\ \mathbf{M}u_{n+1}^h = \mathbf{M}u_{n+1}^{*h} - \frac{1}{n+1}\mathbf{M}\mathbf{G}p_n^h, \end{cases} \quad (5.32)$$

avec les conditions aux limites correspondantes, pour  $n \geq 0$ . Dans ces équations,  $\mathbf{G}$  est l'opérateur gradient discrétisé et  $\mathbf{G}^t$  sa transposée.

Comme dans le cas de l'équation de Burgers, les équations sont naturellement linéarisées. Une fois les termes des séries (jusqu'à l'ordre  $N$  pour  $\hat{u}$  et  $N-1$  pour  $\hat{p}$ ) calculés, on applique l'algorithme de resommation et la technique de continuation.

### 5.5.2 Résultats numériques

On choisit les fonctions  $f$  et  $g$ , ainsi que la condition initiale de telle sorte que la vitesse soit

$$u^1 = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad u^2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

avec

$$\varphi(t, x, y) = e^{-at} e^{-\omega(x^2+y^2)}$$

et que la pression soit

$$p(t, x, y) = e^{-2at} e^{-2\omega(x^2+y^2)}.$$

Pour la simulation, on va prendre  $\nu=0.1$ ,  $a = 2\nu\pi^2$  et  $\omega = 0.1$ . La série  $\hat{u}$  est tronquée à l'ordre  $N = 6$  et  $\hat{p}$  à l'ordre 5. La solution étant rapidement décroissante en temps, on présentera les résultats pour  $t = 1$ .

La FIGURE 5.13 présente des coupes de la vitesse et de la pression. Globalement, on a de bonnes prédictions. Sur les profils de  $u^1$  en  $y = 0$  et le profil de  $u^2$  en  $x = 0$ , on voit un écart par rapport à la valeur exacte nulle. Cet écart est de l'ordre de  $10^{-3}$  à son maximum. Les deux autres profils de vitesse sont en revanche en parfait accord



avec les valeurs théoriques. En ce qui concerne la pression, le schéma sous estime sa valeur au centre. L'écart maximal est d'environ 10%.

Les iso-contours, qui sont représentés sur la FIGURE 5.14, montrent des légères fluctuations dans la région loin du centre du domaine. L'amplitude de ces fluctuations sont négligeables par rapport à celle de la solution.

## 5.6 Conclusion

Dans ce chapitre, on a mené une étude sur la capacité de l'algorithme BPL à résoudre numériquement des équations aux dérivées partielles. Après avoir rappelé les résultats bibliographique dans [RH13] qui montre que le schéma BPL est bien adapté à des simulations sur des grands intervalles de temps, on a mené des tests dans une géométrie bidimensionnelle. On a également mené une comparaison sur l'effet des types d'éléments finis. On a choisi des configurations où on connaît la solution exacte, de telle sorte qu'on puisse comparer non seulement la solution mais aussi les coefficients de la série par rapport aux valeurs exactes. La prochaine étape serait de lancer des simulations sur des configurations plus populaires (écoulement de fluide dans un canal 2D, dans une cavité entraîné, ...). Mais avant cela, il nous faudra examiner l'effet du bord sur le schéma BPL pour les équations de Navier-Stokes.

Dans tous les tests numériques présentés jusqu'ici, on a utilisé l'algorithme BPL pour la resommation des séries. Lors de cette thèse, on a voulu explorer d'autres méthodes pour effectuer numériquement cette resommation. On s'est alors orienté vers la resommation par séries de factorielles généralisées. On présentera nos résultats dans le chapitre suivant.

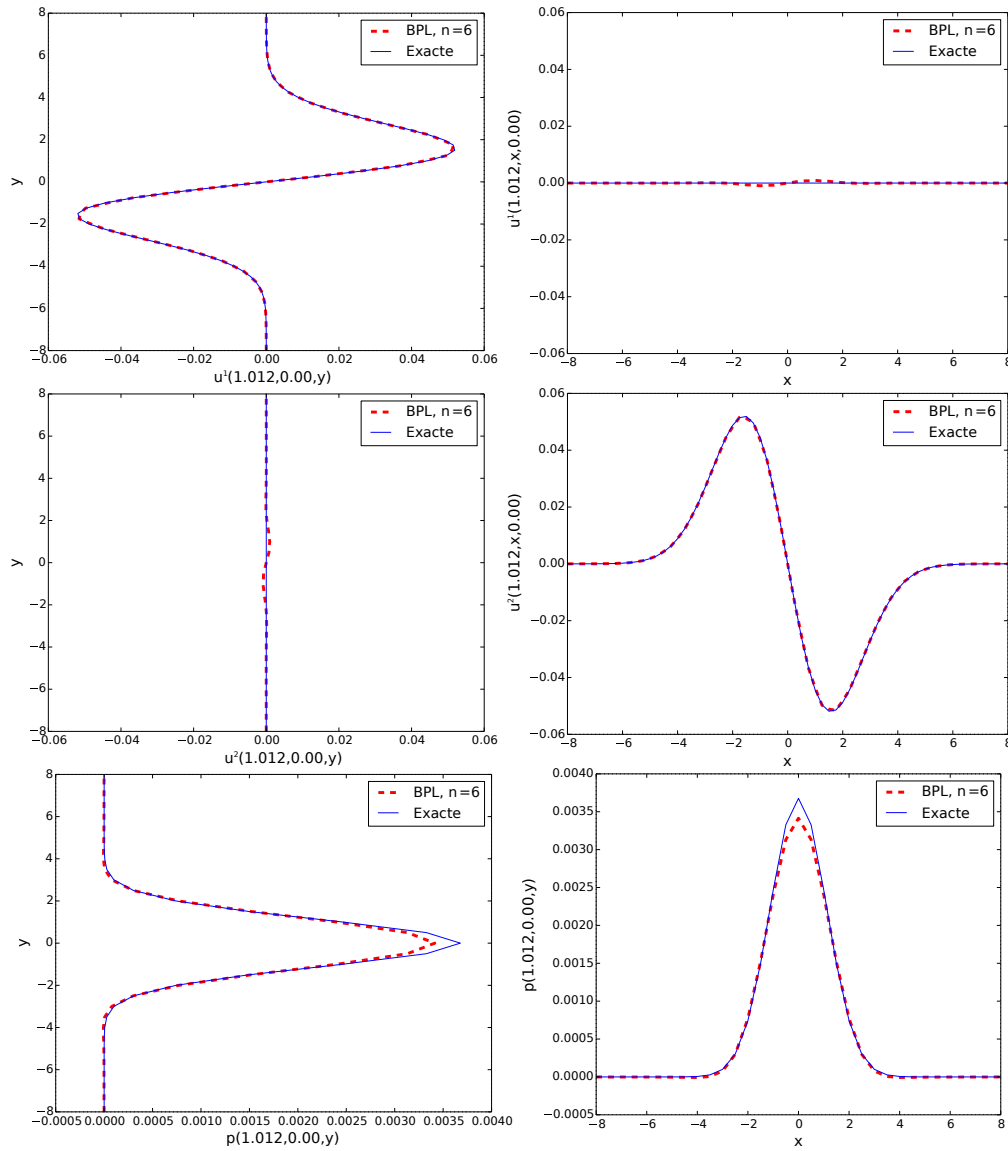


FIGURE 5.13 – Profils de  $u^1$ ,  $u^2$  et  $p$  (de haut en bas) le long de  $x = 0$  (à gauche) et de  $y = 0$  (à droite)

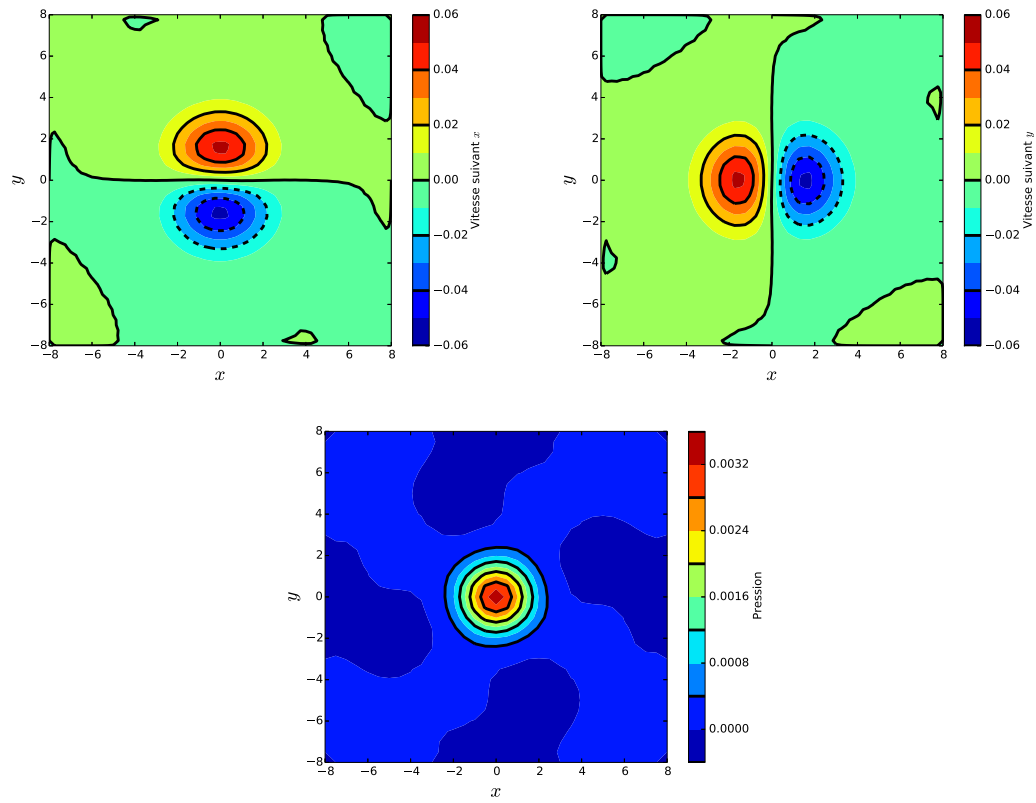


FIGURE 5.14 – Les iso contours de  $u^1$  (en haut à gauche), de  $u^2$  (en haut à droite) et de  $p$  (en bas)

## Chapitre 6

# Resommation par séries de factorielles généralisées

Dans les chapitres précédents, on a utilisé l’algorithme BPL pour approximer la somme de Borel d’une série. Rappelons que cet algorithme se décompose en 3 étapes :

- Calcul de la transformée de Borel,
- Prolongement de la transformée de Borel par une approximation de Padé,
- Quadrature de l’intégrale de Laplace.

La force, mais aussi la faiblesse de cet algorithme est le prolongement par des approximants de Padé. En effet, cette technique a fait ses preuves dans beaucoup de cas. De plus, elle permet de détecter les éventuels pôles de la fonction à approximer, ce qui permet de choisir la direction d’intégration de la transformation de Laplace. Mais de l’autre côté, le système linéaire à résoudre (3.6) peut ne pas être inversible. C’est le cas lorsque la table de Padé n’est pas normale. De plus, dans le cas où il est inversible, il est généralement mal conditionné. Des paires de zéros-pôles, appelés doublets de Froissart, peuvent également apparaître [GK03b, Sta98, GK03a].

Des solutions existent pour éviter les problèmes posés par les approximants de Padé. On peut par exemple utiliser une décomposition en SVD pour réduire le système à résoudre lorsque celui-ci est inversible ou mal posé [GGT13], mais à un coût supplémentaire. On peut aussi utiliser les propriétés des matrices de Toeplitz [AI11]. On peut même éviter d’avoir à résoudre un système linéaire en imposant la forme du dénominateur (et la location des pôles) [Tho91], mais cela nécessite d’avoir suffisam-

ment de connaissance sur la fonction à approximer. On peut aussi utiliser d'autres techniques pour prolonger la transformée de Borel. On peut citer par exemple les transformations conformes. Mais l'utilisation de celles-ci nécessite la connaissance du pôle le plus proche de la fonction à prolonger. Dans toutes les solutions proposées, on obtient une représentation de la somme de Borel sous forme intégrale après les trois étapes de l'algorithme.

On peut en fait éviter le calcul de la somme de Borel en trois étapes (et donc éviter d'avoir à effectuer un prolongement dans l'espace de Borel). En effet, la somme de Borel possède une représentation sous forme d'une série convergente de factorielles inversées ou de factorielles généralisées. Faisant ainsi, on réduit les sources d'erreurs numériques (prolongement, inversion, quadrature).

L'introduction des séries de factorielles généralisées (SFG) comme représentation de la somme de Borel date du début du siècle dernier [Pin02, Nie02, Nie04, Pin14, Wat12b]. Plus récemment, la sommation effective par les SFG a été étudiée numériquement dans [Tho91, Tho00, Kow09, DR07, Wen10].

Dans ce chapitre, on compare l'algorithme BPL à un algorithme basé sur les SFG pour la résolution d'une EDO. Le but est d'examiner la robustesse de chacun pour une utilisation "à l'aveugle".

Dans la section 6.1, on donne la définition, quelques résultats théoriques et un algorithme de calcul des SFG. Dans la section 6.2, on examine point par point les faiblesses de l'algorithme BPL sur des exemples numériques, et on compare avec l'algorithme SFG. On terminera par quelques autres tests intéressants dans la section 6.3.

## 6.1 Série de factorielles généralisées

Plutôt que de donner les résultats rigoureux, on va se contenter ici d'exposer comment la somme de Borel peut être formellement reliée à une série de factorielles généralisées.

### 6.1.1 De la somme de Borel à la série de factorielles généralisées

Soit une série

$$\hat{u}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n.$$

Supposons que  $\hat{u}(t)$  est 1-sommable dans la direction  $d = \mathbb{R}^+$ . Notons  $P$  le prolongement analytique de sa transformée de Borel dans un secteur contenant  $\mathbb{R}^+$ . La série étant sommable,  $P$  est donc à croissance au plus exponentielle dans la direction  $\mathbb{R}^+$ ; il existe deux constantes  $C$  et  $T$  telles que

$$|P(\xi)| \leq C e^{|\xi|/T} \quad (6.1)$$

lorsque  $|\xi|$  est assez grand.

On a :

$$\mathcal{S}\hat{u}(t) - u_0 = \int_0^{+\infty} P(\xi) e^{-\xi/t} d\xi \quad (6.2)$$

$$= \int_0^1 P(-\ln \eta) \eta^{\frac{1}{t}-1} d\eta \quad (6.3)$$

$$= \int_0^1 \sum_{n \geq 0} b_n (1 - \eta)^n \eta^{\frac{1}{t}-1} d\eta \quad (6.4)$$

où les  $b_n$  sont les coefficients du développement de Taylor de  $P(-\ln \eta)$  en  $\eta = 1$ . Rappelons que le développement de Taylor de  $P(\xi)$  en 0 n'est autre que la transformée de Borel  $\hat{\mathcal{B}}\hat{u}(\xi)$  de  $\hat{u}$ . Les  $b_n$  sont donc directement liés aux coefficient  $u_n$  de  $\hat{u}$ . **En fait, on n'a pas besoin de connaître effectivement la fonction prolongée  $P$ , ce qui évite les erreurs d'approximation sur le prolongement.**

Supposons qu'on puisse intervertir la sommation et l'intégrale dans (6.4). On a alors

$$\mathcal{S}\hat{u}(t) - u_0 = \sum_{n \geq 0} b_n \int_0^1 (1 - \eta)^n \eta^{\frac{1}{t}-1} d\eta$$

Après intégrations par parties, il vient :

$$\mathcal{S}\hat{u}(t) = u_0 + \sum_{n \geq 0} \frac{b_n n!}{\frac{1}{t}(\frac{1}{t} + 1) \cdots (\frac{1}{t} + n)}, \quad (6.5)$$

ou encore

$$\mathcal{S}\hat{u}(t) = u_0 + \sum_{n \geq 0} \frac{b_n n! t^{n+1}}{(1+t) \cdots (1+nt)}. \quad (6.6)$$

**Définition 6.1.1.** *On appelle série de factorielles inversées la série*

$$\mathcal{I}(t) = u_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n n! t^{n+1}}{(1+t) \cdots (1+nt)}. \quad (6.7)$$

◆

On a donc vu que, formellement,

$$\mathcal{S}\hat{u}(t) = \mathcal{I}(t).$$

En fait, on peut démontrer que la série  $\mathcal{I}(t)$  est unique, est convergente pour  $\operatorname{Re}(1/t)$  assez grand [Nie02, Nie04, Nö14, Nö24, Nö26, Tho33] et converge effectivement vers  $\mathcal{S}\hat{u}(t)$ .

Notons  $\mathcal{I}^N(t)$  la troncation de la série de factorielles inversées (6.7) à l'ordre  $N$

$$\mathcal{I}^N(t) = u_0 + \sum_{n=0}^N \frac{b_n n! t^{n+1}}{(1+t) \cdots (1+nt)}. \quad (6.8)$$

Alors  $\mathcal{I}^N(t)$  approxime la somme de Borel asymptotiquement de la manière suivante [DR07, LMS99].

**Théorème 6.1.2.** *Soit  $\hat{u}(t)$  une série Borel sommable dans la direction  $\mathbb{R}^+$ . Soient  $C$  et  $T$  les constantes intervenant dans la croissance exponentielle du prolongement  $P$  de  $\hat{\mathcal{B}}\hat{u}$  (définies à l'équation (6.1)). Alors, la représentation en série de factorielles inversées  $\mathcal{I}(t)$  de  $\mathcal{S}\hat{u}(t)$  vérifie*

$$|\mathcal{S}\hat{u}(t) - \mathcal{I}^N(t)| \leq C_N \left| \frac{t^{N+1} N!}{(1+t) \cdots (1+tN) (\operatorname{Re} \frac{1}{t} - \frac{1}{T})} \right| \quad (6.9)$$

où

$$C_N = CT^{\frac{1}{T}} \frac{(N+1+\frac{1}{T})^{N+1+\frac{1}{T}}}{(N+1)^N}. \quad (6.10)$$

★

En appliquant une rotation adaptée à (6.7), on peut représenter la somme de Borel dans une autre direction  $d$ .

En fait,  $\mathcal{S}\hat{u}(t)$  peut être représenté par une série plus générale, appelée série de factorielles généralisées (SFG) [Tho29, Tho90] :

$$\mathcal{S}\hat{u}(t) = u_0 + \sum_{n \geq 0} \frac{b_n s_1 \dots s_n t^{n+1}}{(1+ts_1) \dots (1+ts_n)}. \quad (6.11)$$

Les  $s_n$  sont des nombres complexes situés sur la demi-droite  $d'$  qui est la reflection de la direction de sommation  $d$  par rapport à l'axe des réels. La série de factorielles généralisées (6.11) converge si, par exemple, les  $s_n$  sont régulièrement espacés :

$$s_n = n\omega e^{-i\theta}$$

où  $\theta$  est l'angle de la demi-droite  $d$  et  $\omega > \omega_0$  pour un certain  $\omega_0 > 0$ .  $\omega_0$  est lié à la localisation du pôle le plus proche de  $P$  dans le plan complexe. Selon [Tho91], plus  $\omega$  est proche de  $\omega_0$ , plus la convergence de (6.11) est rapide. Pour une équation linéaire, la position de ce pôle le plus proche de l'origine se “lit” sur les coefficients de la transformée de Borel de l'équation. Pour une équation non-linéaire, la détermination de  $\omega_0$  est plus difficile.

On va maintenant voir comment les coefficients de la SFG se calculent.

### 6.1.2 Algorithme de calcul de la SFG

Les coefficients  $b_n$  sont liés aux coefficients de  $\hat{u}$  par la relation suivante

$$b_n = \frac{1}{s_1 \dots s_n} \sum_{k=1}^{n+1} |S(n, k-1)| u_k. \quad (6.12)$$



où les  $S(n, k)$  sont les nombres de Stirling de premier espèce généralisés, qui se calculent récursivement par

$$\begin{cases} S(0, 0) = 1, \\ S(n, 0) = 0, & \text{si } n > 0, \\ S(n+1, k) = S(n, k-1) - s_n S(n, k), & \text{si } n \geq 0, k = 1, \dots, n, \\ S(n, k) = 0, & \text{si } n \geq 0, k \geq n+1. \end{cases} \quad (6.13)$$

Si on ne souhaite calculer que peu de termes (si  $N$  est assez petit), la relation (6.12) suffit pour calculer les  $b_n$ . En revanche, si on veut calculer un nombre élevé de termes, il faut remarquer que les nombres de Stirling croissent très rapidement. Il faut alors éviter de les calculer directement. Pour cela, il suffit d'utiliser la relation

$$|S(j+1, k)| = s_j |S(j, k)| + |S(j, k-1)|, \quad 1 \leq k \leq j+1. \quad (6.14)$$

Grâce à cette relation, on peut calculer les  $b_n$  avec l'algorithme suivant [Tho91].

Prenons  $d = \mathbb{R}^+$ . Notons  $\tau = 1/t$  et  $v_n$  le  $n$ -ème terme de la SFG :

$$v_{n+1} = \frac{b_n n!}{\tau(\tau + s_1) \cdots (\tau + s_k)} = \frac{\sum_{k=0}^n |S(n, k)| v_{k+1}^{(1)} \tau^{k+1}}{\tau(\tau + s_1) \cdots (\tau + s_k)} \quad (6.15)$$

où  $v_{k+1}^{(1)} = u_k t^{k+1}$ . Les  $v_{n+1}$  peuvent alors se calculer de manière récursive comme suit :

$$\begin{cases} v_{k+1}^{(1)} &= u_k t^{k+1}, & k \geq 0 \\ v_{k+1}^{(j+1)} &= \frac{s_{j-1} v_{k+1}^{(j)} + \tau v_k^{(j)}}{\tau + s_j}, & k \geq j \geq 1 \\ v_{n+1} &= v_{n+1}^{(n+1)}, & n \geq 0. \end{cases} \quad (6.16)$$

Et la somme de Borel s'écrit :

$$\mathcal{S}\hat{u}(t) = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

On peut alors fonder un schéma d'intégration temporelle sur cet algorithme.

### 6.1.3 Schéma d'intégration basé sur la SFG

Un schéma d'intégration temporelle basé sur la resommation de Borel-Laplace par SFG se décompose comme suit.

- Calcul des termes de la série  $\hat{u}^N(t)$ ,
- Calcul des termes de la série de factorielles généralisées  $\mathcal{I}^N(t)$
- Evaluation de l'erreur  $Err(t)$  à partir de  $\mathcal{I}^N(t)$ ,
- Continuation.

On appellera ce schéma “schéma SFG”.

Comme auparavant, on supposera que les séries rencontrées sont Borel-sommable dans la direction  $\mathbb{R}^+$ . On choisira alors

$$s_n = n, \quad n \geq 1.$$

On va examiner le potentiel de ce schéma par rapport au schéma BPL.

## 6.2 Comparaison BPL et SFG

On va considérer les faiblesses du schéma BPL à travers des exemples numériques dans cette section, et on va voir si le schéma SFG permet de les contourner. Pour l'instant, nous analyserons les résultats sans utilisation d'algorithme de continuation.

Les points qu'on va voir sont :

- la non-inversibilité du système (3.6) permettant de calculer les approximants de Padé,
- les pôles des approximants lorsque le système (3.6) est inversible,
- l'erreur des approximants de Padé même lorsqu'il n'y a pas de pôle dans la direction d'intégration,
- et l'erreur de discrétisation de l'intégrale de Laplace dans BPL.

On va commencer par le dernier point.

### 6.2.1 Erreur de discrétisation de la transformation de Laplace

Reprenons l'équation d'Euler

$$t^2 \frac{du}{dt} + u = t.$$

On a vu dans les exemples 2.2.5 et 2.4.7 que la solution formelle

$$\hat{u}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (n-1)! t^n \quad (6.17)$$

est sommable dans la direction  $\mathbb{R}^+$ . Sa transformée de Borel ainsi que son prolongement sont

$$\hat{\mathcal{B}}\hat{u}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \xi^n$$

et

$$P(\xi) = \frac{1}{1+\xi}. \quad (6.18)$$

Et la somme de Borel est

$$\mathcal{L}_{\mathbb{R}^+}\hat{u}(t) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\xi/t}}{1+\xi} d\xi = E(t). \quad (6.19)$$

En théorie, la resommation donne donc la solution exacte de l'équation.

Numériquement, la série (6.17) est tronquée. La transformée de Borel est également tronquée

$$\hat{\mathcal{B}}\hat{u}^N(\xi) = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \xi^n. \quad (6.20)$$

Mais dès que  $N \geq 2$ , l'approximation (la plus proche de la diagonale) de Padé de (6.20) donne exactement le prolongement (6.18) :

$$P^N(\xi) = P(\xi), \quad \forall N \geq 2.$$

La seule erreur numérique de BPL vient donc de la quadrature de la somme (6.19).

Prenons  $N = 15$  termes dans la série et  $N_G = 6$  points de Gauss. La FIGURE 6.1 présente une comparaison entre la solution analytique donnée par BPL et celle fournie par SFG (sans continuation). On peut y voir que, pour  $t < 1$ , les deux algorithmes donnent une solution acceptable. Au delà, la solution par SFG s'écarte de la solution de référence alors que BPL continue à assez bien approximer la solution exacte.

On conclut que si la quadrature est la seule source d'erreur, alors BPL donne un meilleur résultat. En fait, la quadrature ne devrait pas être considérée comme une faiblesse du schéma BPL. C'est une simple erreur de discrétisation.

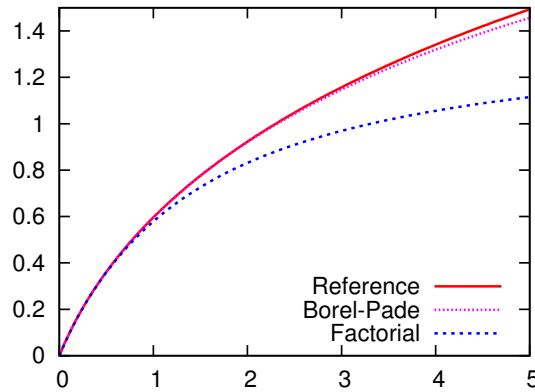


FIGURE 6.1 – Solutions approchées de l'équation d'Euler

Toutefois, dans les problèmes réalistes, les chances sont minces pour que l'approximant de Padé soit exactement le prolongé de la transformée de Borel. On va examiner l'effet de l'approximation de Padé.

### 6.2.2 Erreur due à l'approximation de Padé

Les approximants de Padé ont obtenu une bonne popularité car ils fournissent, dans beaucoup de cas, un bon prolongement. Toutefois, il n'y a pas de théorème général de convergence.

Reprenons l'équation

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + u^2 = 0 \\ u(0) = 1. \end{cases} \quad (6.21)$$

La série solution formelle est

$$\hat{u} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n. \quad (6.22)$$

Sa transformée de Borel

$$\hat{\mathcal{B}}\hat{u}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \xi^n. \quad (6.23)$$

se prolonge en

$$P(\xi) = -e^{-\xi}. \quad (6.24)$$

La resommation, rappelons-le, redonne la solution exacte

$$1 - \int_0^{+\infty} e^{-\xi} e^{-\xi/t} d\xi = \frac{1}{1+t}. \quad (6.25)$$

Numériquement, avec BPL, la transformation de Borel tronquée est prolongée par l'approximant de Padé suivant, si par exemple  $N = 7$  et  $\mathfrak{q} = \mathfrak{r} = 3$  :

$$P^N(\xi) = \frac{1 - \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{10}\xi^2 - \frac{1}{120}\xi^3}{1 + \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{10}\xi^2 + \frac{1}{120}\xi^3}. \quad (6.26)$$

Cette fonction est analytique dans un voisinage de  $\mathbb{R}^+$ . La transformation de Laplace donne une bonne représentation de la solution exacte 6.25 pour des valeurs de  $t$  allant jusqu'à environ 2 (voir FIGURE 6.2). Mais quand  $t$  croît, BPL souffre de l'erreur due à l'approximation de Padé (et, à plus faible mesure, de l'erreur de quadrature). L'algorithme SFG, quant à lui, est exact. Cet exemple illustre bien l'intérêt d'éviter de passer systématiquement par les étapes de l'algorithme BPL.

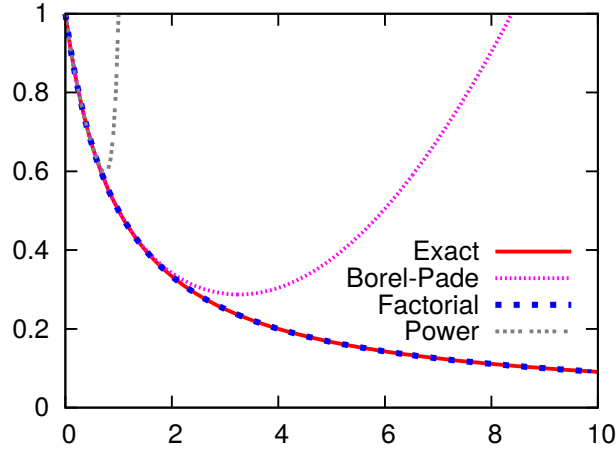


FIGURE 6.2 – Solutions approchées de l'équation (6.21)

Dans le cas général, augmenter  $N$  ne permet pas forcément d'améliorer le schéma BPL. En effet, on n'a pas de théorème de convergence uniforme des approximants de Padé, même pas des Padé diagonaux.

Dans la section suivante, on va regarder le cas où l'approximant de Padé présente un pôle sur  $\mathbb{R}^+$  alors que la série est sommable dans cette direction.

### 6.2.3 Pôle dans l'approximant de Padé

Considérons l'équation

$$\begin{cases} t \frac{du}{dt} = u^2 + u, \\ \frac{du(0)}{dt} = \lambda. \end{cases} \quad (6.27)$$

Par un changement de variable (dilatation sur le temps), on peut toujours se ramener au cas où  $\lambda = 1$ . La solution formelle et sa transformée de Borel sont alors, respectivement

$$\hat{u}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} t^n \quad (6.28)$$

et

$$\mathcal{B}\hat{u}(\xi) = \sum_{n \geq 0} \frac{\xi^n}{n!}. \quad (6.29)$$

$\hat{\mathcal{B}}\hat{u}(\xi)$  se prolonge naturellement en la fonction

$$P(\xi) = e^{\xi} \quad (6.30)$$

qui est entière alors que son approximant de Padé, avec  $\mathfrak{q} = \mathfrak{r} = 3$ ,

$$P^N(\xi) = \frac{1 + \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{10}\xi^2 + \frac{1}{120}\xi^3}{1 - \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{10}\xi^2 - \frac{1}{120}\xi^3} \quad (6.31)$$

possède un pôle sur  $\mathbb{R}^+$ . Les approximants de Padé étant invariants par dilatations [Gil78, BVI94],  $P^7(\xi)$  a un pôle quelque soit  $\lambda > 0$ .

Pour  $\lambda = 8$ , la FIGURE 6.3 montre que, pour des petites valeurs de  $t$ , les pôles peuvent être simplement ignorés. Mais il y a des valeurs particulières de  $t$  où le schéma BPL a un comportement irrégulier. Avec la série de factorielles généralisées, on n'observe pas ce comportement.

En fait, comme il est précisé dans [DR65, LR84], les pôles peuvent être ignorés lors de la quadrature d'une intégrale, mais au prix d'une perte de précision ou d'une convergence plus lente.

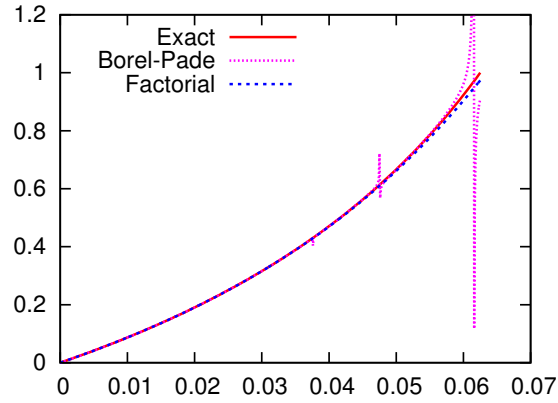


FIGURE 6.3 – Cas où il y a un pôle dans l'approximant de Padé

Dans les exemples précédents, le système (3.6) caractérisant les coefficients de Padé était inversible. En fait, l'approximant de Padé existe toujours, mais peut ne pas être unique. Considérons ce cas.

#### 6.2.4 Non unicité des approximants de Padé

Un problème classique auquel on se heurte avec les approximations de Padé est la non-unicité de la représentation. Pour illustrer la situation, prenons en considération l'équation

$$\begin{cases} t^2 \frac{du}{dt} + u = t - t^2, \\ u(0) = 0. \end{cases} \quad (6.32)$$

On peut vérifier aisément que la solution formelle est

$$\hat{u}(t) = t + 2 \sum_{n \geq 1} (-1)^n n! t^{n+1}. \quad (6.33)$$

Cette série est Borel sommable dans la direction  $d = \mathbb{R}^+$ . Sa transformée de Borel est

$$\mathcal{B}\hat{u}(\xi) = 1 + 2 \sum_{n \geq 1} (-1)^n \xi^n = 1 - 2\xi + 2\xi^2 - 2\xi^3 + \dots \quad (6.34)$$

se prolonge en

$$P(\xi) = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}. \quad (6.35)$$

Cela nous conduit à la solution exacte

$$\mathcal{S}\hat{u}(t) = \int_0^\infty \frac{1 - \xi}{1 + \xi} e^{-\xi/t} d\xi. \quad (6.36)$$

Lorsqu'on met l'algorithme BPL en œuvre, on ne peut cependant pas trouver un approximant diagonal à (6.34). En effet, la définition (3.4) conduit à un système non inversible. Par exemple lorsque  $N = 5$ ,  $\mathbf{q} = \mathbf{r} = 2$ , le système (3.6) devient

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (6.37)$$

et l'approximant  $P^5(\xi) = [2/2](\xi)$  ne peut pas être calculé. Avec SFG, on n'a pas de problème particulier comme le montre la FIGURE 6.4.

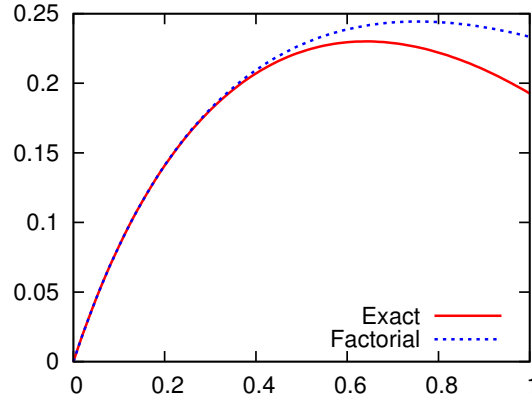


FIGURE 6.4 – Equation (6.32)

En fait, la raison pour laquelle on ne trouve pas un approximant de Padé  $[2/2]$  à partir de la définition est la présence d'un facteur commun dans  $P^5$ . En effet, si on réduit le système (6.37) “à la main”, c'est-à-dire si on ne résout que  $r_2$ , en gardant  $r_1$  comme paramètre (ou l'inverse), on obtient :

$$r_2 = r_1 - 1, \quad q_0 = 1, \quad q_1 = r_1 - 2, \quad q_2 = 1 - r_1 \quad (6.38)$$



et l'approximant de Padé est

$$\frac{1 + (r_1 - 2)\xi + (1 - r_1)\xi^2}{1 + r_1\xi + (r_1 - 1)\xi^2} = \frac{(1 - \xi)(1 - \xi + r_1\xi)}{(1 + \xi)(1 - \xi + r_1\xi)}. \quad (6.39)$$

Il existe des algorithmes permettant systématiquement de détecter si on a besoin d'une réduction et de réduire effectivement le système [AI11, GGT13, Bul80], mais au prix d'un coût supplémentaire. Par exemple, dans le chapitre 5, on a utilisé une réduction par décomposition SVD décrite dans [GGT13].

Dans la dernière section, on va mener quelques autres tests pour comparer les deux algorithmes. On a considéré uniquement des cas où on pouvait toujours calculer les approximants de Padé sans avoir recours à une optimisation.

### 6.3 Autres tests

Considérons le problème

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + u^3 = 0 \\ u(0) = 1 \end{cases} \quad (6.40)$$

Dans toute la suite, on fixe  $N = 8$ .

La FIGURE 6.5 compare les solutions approchées données par BPL et SFG. On peut y observer que les deux algorithmes reproduisent la solution exacte avec une relative précision pour des petites valeurs de  $t$ . Mais à partir de  $t = 1$ , on voit que les écarts avec la solution exacte commencent à être visibles, d'abord avec BPL, puis avec SFG.

Si nous regardons de plus près, nous pouvons voir (FIGURE 6.6) que BPL est plus précis pour  $t$  petit. Mais autour de  $t = 0.4$  les deux courbes d'erreur s'intersectent et SFG devient plus précis.

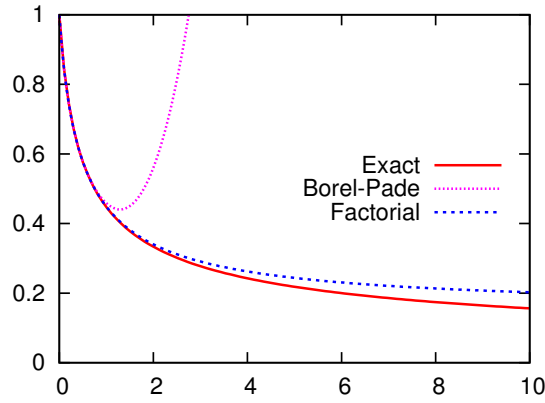


FIGURE 6.5 – Solutions approchées de l'équation (6.40)

Des conclusions similaires peuvent être tirées avec le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} - \frac{1+u^2}{1+t^2} = 0, \\ u(0) = -1. \end{cases} \quad (6.41)$$

La solution exacte est

$$u(t) = \tan(\arctan(t) - 1). \quad (6.42)$$

Les deux algorithmes prédisent bien la solution, comme on peut le voir sur la FIGURE 6.7, pour les premières valeurs de  $t$ . Pour  $t$  au delà de 2, seul l'algorithme SFG donne une solution satisfaisante.

La FIGURE 6.8 montre qu'au début, l'erreur est plus faible avec BPL qu'avec SFG, mais la tendance s'inverse pour  $t$  plus grand.

Considérons maintenant l'équation de logistique

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = ru(1-u) - h, \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (6.43)$$

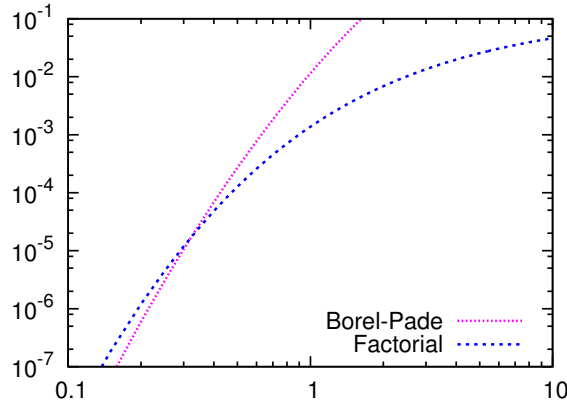


FIGURE 6.6 – Erreurs absolues pour l'équation (6.40) en échelle log-log

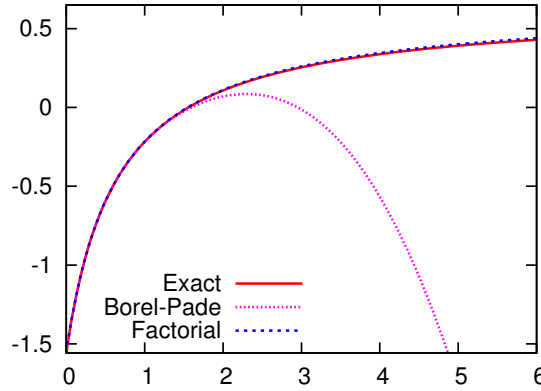


FIGURE 6.7 – Solutions exacte et approchées de l'équation (6.41)

qui modélise la dynamique d'une population avec fauchage [HSD13]. Le taux de croissance  $r$  est fixé à 1 et le taux de fauchage  $h$  à  $1/5$ .

La FIGURE 6.9 présente les solutions approchées avec une population initiale de  $u_0 = 3$ . On constate que la série de factorielle prédit la solution exacte avec une bonne précision, même pour des grandes valeurs de  $t$ , contrairement à BPL.

Dans un dernier test, on va se concentrer sur le nombre d'itérations et le temps

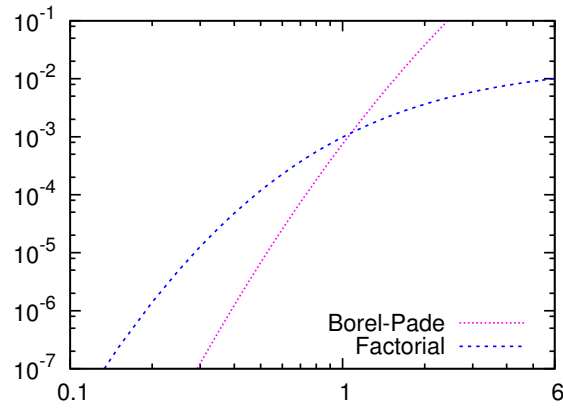


FIGURE 6.8 – Erreurs absolues pour l'équation (6.41)

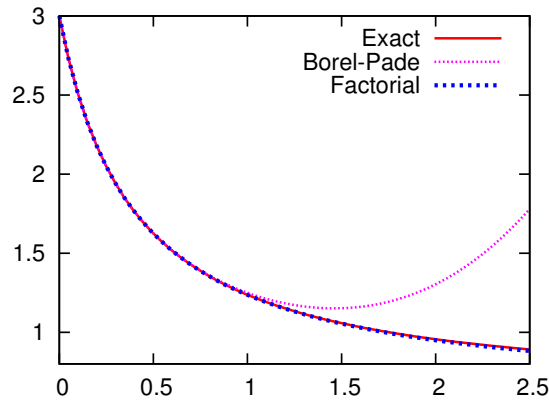


FIGURE 6.9 – Evolution de population avec fauchage

de calcul. Prenons le système de Lokta-Volterra

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u(\alpha - \beta v), \\ \frac{dv}{dt} = -v(\gamma - \delta u), \\ u(0) = u_0, \quad v(0) = v_0 \end{cases} \quad (6.44)$$

qui modélise un système “proie-prédateur”.

On fixe tous les paramètres de l'équation à la valeur 1. On prend deux valeurs du critère de précision  $\epsilon$  (défini en (3.14)), basé sur le résidu relatif. Le nombre d'itérations pour atteindre  $t = 400s$  avec  $N = 8$ , ainsi que le temps CPU sont présentés sur la TABLE 6.1. On observe que SFG nécessite généralement plus d'itérations que BPL. Mais lorsqu'on relâche un peu la précision, on voit que ce nombre d'itérations diminue beaucoup plus rapidement qu'avec BPL.

Résidu	Borel-Padé		Factorial series	
	Iterations	CPU	Iterations	CPU
$10^{-4}$	989	$8.28 \cdot 10^{-2}$	4064	$9.36 \cdot 10^{-2}$
$10^{-3}$	717	$7.45 \cdot 10^{-2}$	2322	$7.48 \cdot 10^{-2}$

TABLE 6.1 – *Equations de Lotka-Volterra. Nombre d'itérations et temps CPU*

On peut faire le même constat en ce qui concerne le temps CPU : lorsqu'on relâche la precision, SFG devient aussi rapide que BPL.

## 6.4 Conclusion

Les tests qu'on a exposés montrent que beaucoup de paramètres devaient être considérés pour que BPL, sans optimisation supplémentaire, fournisse une solution numérique. De l'autre côté, l'algorithme SFG semble donner une solution dans tous les cas, et semble donc plus robuste. En revanche, lorsque l'algorithme des approximations de Padé diagonaux est efficace et qu'on demande une précision élevée, la convergence de SFG est plus lente que celle de BPL (voir FIGURE 6.1 et TABLE 6.1). En effet, l'approximation de Padé agirait comme une accélération de la convergence. La question qu'on pourrait se poser est alors de déterminer lequel des deux algorithmes "BPL avec réduction" et "SFG, éventuellement avec accélération de convergence" serait le plus rapide, du point de vue temps CPU.

## Chapitre 7

# Conclusion générale et perspectives

Dans ce travail, nous avons étudié l'efficacité de l'algorithme d'intégration temporelle basé sur la resommation des séries divergentes par la méthode de Borel-Laplace (BPL). Nous nous sommes particulièrement intéressés à la capacité de ce schéma à reproduire des propriétés qualitatives d'équations différentielles.

Il est connu que pour avoir un comportement stable sur de longs intervalles de temps, les intégrateurs numériques d'un système hamiltonien doivent être symplectiques. Les tests numériques que nous avons menés sur des problèmes modèles de systèmes hamiltoniens montrent que l'algorithme de resommation BPL possède cette propriété avec une bonne précision. Cela implique la conservation de l'Hamiltonien (énergie) sur un long intervalle de temps, ainsi que la conservation des volumes convectés par le flot hamiltonien dans l'espace des phases.

Une autre propriété qualitative à laquelle on s'est intéressé est l'iso spectralité. Les systèmes hamiltoniens qui sont complètement intégrables, décrits par une paire de Lax, possèdent cette propriété. Les tests que l'on a effectués montrent que le schéma BPL est tout à fait apte à reproduire cette propriété sur de grands intervalles de temps.

On a également appliqué le schéma à la résolution d'équations aux dérivées par-

tielles de la mécanique (équation de la chaleur, équation de Burgers et équations de Navier-Stokes). On a montré que le schéma BPL, qui permet d'avoir de grands pas de temps, est bien adapté à la simulation sur un temps long pour de telles équations.

Nous avons choisi une discrétisation spatiale par éléments finis. Cette méthode est particulièrement adaptée aux géométries complexes. Nous avons vérifié que les différents choix d'élément possibles dans cette méthode permettent une meilleure modélisation aux limites du domaine. Les résultats obtenus ouvrent une bonne perspective de l'application de l'intégration temporelle par BPL pour les EDP.

Afin d'éviter les écueils existant dans l'utilisation des approximant de Padé, étape importante dans l'algorithme BPL, nous avons proposé une alternative. Il s'agit de la resommation par séries de factorielles généralisées (SFG). Nous avons également présenté une première étude prospective de l'efficacité du schéma SFG par rapport au BPL sur quelques exemples modèles. Les résultats obtenus montrent que l'approche par SFG est plus robuste. Mais en revanche, sa convergence est plus lente par rapport à BPL lorsque ce dernier est efficace.

Bien sûr, beaucoup d'autres points méritent d'être développés. Par exemple, notre algorithme devrait être amélioré pour intégrer la détection de l'indice (ou du multi-indice) Gevrey de sommation et aussi de la direction. Pour cela, les résultats sur les équations différentielles non linéaires et surtout sur les équations aux dérivées partielles doivent être développés.

Des études théoriques sur l'estimation de l'erreur de notre algorithme, ainsi que des résultats de convergence doivent être établies. Les résultats partiels à notre disposition montrent qu'il est possible d'obtenir de telles estimations. Les premières études sont en cours.

Sur le plan numérique, la prochaine étape sera l'adaptation et la validation de notre algorithme sur des géométries plus complexes. Enfin, notre ambition à long terme est de montrer que notre approche permet d'améliorer les simulations d'écou-

lements à grand nombre de Reynolds sur un grand intervalle de temps.





# Bibliographie

- [ACHR04] Cyrille Allery, Jean-Marc Cadou, Aziz Hamdouni, and Dina Razafindralandy. Application of the Asymptotic Numerical Method to the Coanda effect. *Revue Européenne des Eléments Finis*, 13(1-2) :57–77, 2004.
- [ADM11] Mejdi Azaïez, Michel Deville, and Ernest H. Mund. *Éléments Finis pour les Fluides Incompressibles*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 2011.
- [AHLS88] Nadine Aubry, Philip Holmes, John L. Lumley, and Emily Stone. The dynamics of coherent structures in the wall region of a turbulent boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 192 :115–173, 1988.
- [AI11] V.M. Adukov and O.L. Ibryaeva. A new algorithm for computing Pade approximants. *ArXiv e-prints*, dec 2011.
- [All02] Cyrille Allery. *Contribution à l’identification des bifurcations et à l’étude des écoulements fluides par des systèmes dynamiques d’ordre faible (P.O.D.)*. PhD thesis, 2002.
- [AvdM92] Schaelin A and Moser A van der Maas, J. *Simulation of airflow through large openings in buildings*. Ashrae Transactions, 1992.
- [Bal99] Werner Balser. Divergent solutions of the heat equation : On an article of Lutz, Miyake and Schäfer. *Pacific Journal of Mathematics*, 188(1) :53–63, 1999. cited By 26.
- [Bal04] Werner Balser. Summability of formal power-series solutions of partial differential equations with constant coefficients. *Journal of Mathematical Sciences*, 124(4) :5085–5097, 2004.

- [BJC05] Claudine Beghein, Yi Jiang, and Qingyan Chen. Using large eddy simulation to study particle motions in a room. *Indoor Air*, 15 :281–290, 2005.
- [BJGM96] George A. Baker Jr. and Peter R. Graves-Morris. *Padé Approximants*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 1996.
- [BJGW61] George A. Baker Jr., J.L. Gammel, and John Wills. An investigation of the applicability of the Padé approximant method. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2 :405–418, 1961.
- [BL76] Edward J. Barbeau and P. J. Leah. Euler’s 1760 paper on divergent series. *Historia Mathematica*, 3 :141–160, 1976.
- [BO99] Carl M Bender and Steven A Orszag. *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers I : Asymptotic Methods and Perturbation Theory*. Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers. Springer, 1999.
- [Bor01] Emile Borel. *Leçons sur les séries divergentes*. Les grands classiques Gauthier-Villars. Jacques Gabay, Sceaux, 1901.
- [Bor88] Émile Borel. *Leçons sur les séries divergentes*. Les grands classiques Gauthier-Villars. J. Gabay, Sceaux, 1988.
- [Bre80] Claude Brezinski. *Padé-type approximation and general orthogonal polynomials*. International series of numerical mathematics. Birkhäuser, 1980.
- [Bru95] Victor A Brumberg. *Analytical Techniques of Celestial Mechanics*. Springer, 1995.
- [Bul80] Adhemar Bultheel. Recursive algorithms for nonnormal Pade tables. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 39(1) :106–118, 1980.
- [But08] John Charles Butcher. *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. Wiley, 2008.

- [BV90] Olivier Babelon and Claude-Michel Viallet. Hamiltonian structures and Lax equations. *Physics Letters B*, 237(3-4) :411 – 416, 1990.
- [BVI94] Claude Brezinski and Jeannette Van Iseghem. Padé approximations. In P. G. Ciarlet and J. L. Lions, editors, *Handbook of Numerical Analysis*, volume 3, pages 47 – 222. Elsevier, 1994.
- [CACM10] Noel Challamel, Anisio Andrade, Dinar Camotim, and Branko M. Milsavlevich. Flexural-torsional buckling of cantilever strip beam-columns with linearly varying depth. *Journal of Engineering Mechanics-ASCE*, 136(6) :787–800, 2010.
- [Cad97] Jean-Marc Cadou. *Méthode Asymptotique Numérique pour le calcul des branches solutions et des instabilités dans les fluides et pour les problèmes d’interaction fluide-structure*. PhD thesis, Université de Metz, 1997.
- [CBS05] M. Couplet, C. Basdevant, and P. Sagaut. Calibrated reduced-order pod-galerkin system for fluid flow modelling. *Journal of Computational Physics*, 207(1) :192–220, 2005.
- [CCC10] Steven Chapra, Steven C Chapra, and Raymond P Canale. *Numerical Methods for Engineers*. McGraw-Hill Higher Education, 2010.
- [CDPF07] Bruno Cochelin, Nouredine Damil, and Michel Potier-Ferry. *Méthode asymptotique numérique*. Hermes Science Publications, 2007.
- [Chh08] Marx Chhay. *Intégrateurs géométriques : Application à la mécanique des fluides*. Thèse, Université de La Rochelle, Dec 2008.
- [CHHS11] Marx Chhay, Emma Hoarau, Aziz Hamdouni, and Pierre Sagaut. Comparison of some Lie-symmetry-based integrators. *Journal of Computational Physics*, 230(5) :2174 – 2188, 2011.
- [CHQZ07] Claudio Canuto, Yousuff M. Hussaini, Alfio Quarteroni, and Thomas A. Zang. *Spectral Methods : Fundamentals in Single Domains*. Scientific Computation. Springer-Verlag, 2007.

- [Cia02] Philippe G. Ciarlet. *Finite Element Method for Elliptic Problems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 2002.
- [CL09] Patrick Ciarlet and Eric Luneville. *La méthode des éléments finis : de la théorie à la pratique : Tome 1, Concepts généraux*. Cours (ENSTA). Les Presses de l'ENSTA, 2009.
- [CLT08] Ovidiu Costin, Guo Luo, and Saleh Tanveer. Divergent expansion, Borel summability and three-dimensional Navier-Stokes equation. *Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 36(1876) :2775–2788, 2008.
- [CSJT01] Masud Chaichian, M. M. Sheikh-Jabbari, and A. Tureanu. Hydrogen atom spectrum and the lamb shift in noncommutative qed. *Phys. Rev. Lett.*, 86 :2716–2719, Mar 2001.
- [CT06] Ovidiu Costin and Saleh Tanveer. Borel summability of Navier-Stokes equation in  $\mathbb{R}^3$  and small time existence. *ArXiv Mathematics e-prints*, dec 2006.
- [DA12] Artur Diener and Alexander Aycock. De siebus divergentibus (traduction allemande). *arXiv :1202.1506*, 3 :141–160, 2012.
- [DF95] Lars Davidson and Bijan Farhanieh. *CALC-BFC : A Finite-volume Code Employing Collocated Variable Arrangement and Cartesian Velocity Components for Computation of Fluid Flow and Heat Transfer in Complex Three-dimensional Geometries*. Publikation / Chalmers tekniska högskola, Institutionen för termo- och fluiddynamik. 1995.
- [DPF90] Nouredine Damil and Michel Potier-Ferry. A new method to compute perturbed bifurcations : application to the buckling of imperfect elastic structures. *International journal of Engineering Science*, 28(9) :943–957, 1990.
- [DR65] Philip J. Davis and Philip Rabinowitz. Ignoring the singularity in approximate integration. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics : Series B, Numerical Analysis*, 2(3) :367–383, 1965.

- 
- [DR07] Eric Delabaere and Jean-Marc Rasoamanana. Sommutation effective d'une somme de borel par séries de factorielles. *Annales de l'institut Fourier*, 57(2) :421–456, 2007.
- [Dub75] Georgii Nikolaevich Duboshin. *Celestial mechanics : Basic problems and methods /3rd revised and enlarged edition/*. Springer, 1975.
- [Dup66] Thurman Henry Dupree. A perturbation theory for strong plasma turbulence. *Physics of Fluids*, 9(9) :1773–1782, 1966.
- [DV10] Trond Digernes and V. S. Varadarajan. Notes on Euler's work on divergent factorial series and their associated continued fractions. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 41(1) :39–66, 2010.
- [Eul60] Leonhard Euler. De siebus divergentibus. *Opera Omnia, I*, 14 :585–617, 1760.
- [FG14] André Fortin and André Garon. Les éléments finis : de la théorie à la pratique. Cours. Université Laval, 2014.
- [Fla74] Herman Flaschka. The Toda lattice. II. Existence of integrals. *Physical Review B : Condensed Matter and Materials Physics*, 9 :1924–1925, Feb 1974.
- [GGT13] Pedro Gonnet, Stefan Güttel, and Lloyd N. Trefethen. Robust Padé approximation via SVD. *SIAM Review*, 55(1) :101–117, 2013.
- [Gil78] Jacek Gilewicz. *Approximants de Padé*, volume 667 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1978.
- [GK03a] Jacek Gilewicz and Yuri Kryakin. Froissart doublets in Padé approximation in the case of polynomial noise. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 153(1–2) :235–242, 2003.
- [GK03b] Jacek Gilewicz and Yuri Kryakin. Froissart doublets in padé approximation in the case of polynomial noise. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 153(1-2) :235–242, 2003.
- [GMR97] P.R. Graves-Morris and D.E. Roberts. Problems and progress in vector Padé approximation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 77(1–2) :173 – 200, 1997.

- [GO86] David Gottlieb and Steven A. Orszag. Numerical analysis of spectral methods : theory and applications, 1986.
- [GSSC14] Francesco Gargano, Marco Sammartino, Vincenzo Sciacca, and Kevin W. Cassel. Analysis of complex singularities in high-Reynolds-number Navier–Stokes solutions. *Journal of Fluid Mechanics*, 747 :381–421, 5 2014.
- [GT98] Raymond Gérard and Hidetoshi Tahara. Formal power series solutions of nonlinear first order partial differential equations. *Funkcialaj Ekvacioj*, 4 :133–166, 1998.
- [Hal97] Nina Hall. Interview of Sir Michael Berry by Nina Hall : Caustics, catastrophes and quantum chaos. *Nexus News*, pages pp. 4–5, February 1997.
- [HGG<sup>+</sup>13] J. Heyman, G. Girault, Y. Guevel, C. Allery, A. Hamdouni, and J.-M. Cadou. Computation of hopf bifurcations coupling reduced order models and the asymptotic numerical method. *Computers and Fluid*, 76 :73–85, 2013.
- [Hir07] Charles Hirsch. *Numerical Computation of Internal and External Flows (Second Edition)*. Butterworth-Heinemann, Oxford, second edition edition, 2007.
- [HLW02] Ernst Hairer, Christian Lubich, and Gerhard Wanner. *Geometric Numerical Integration : Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*. Springer series in computational mathematics. Springer, 2002.
- [HSD13] Morris Hirsch, Stephen Smale, and Robert L. Devaney. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. Elsevier, 2013.
- [JPY89] Ramis Jean-Pierre and Sibuya Yasutaka. Hukuhara domains and fundamental existence and uniqueness theorems for asymptotic solutions of Gevrey type. *Asymptotic Analysis*, 2(1) :39–94, 1989.

- [Kow09] Victor Kowalenko. *The Stokes Phenomenon, Borel Summation and Mellin-Barnes Regularisation*. Bentham, 2009.
- [Lam91] John Denholm Lambert. *Numerical Methods for Ordinary Differential Systems : The Initial Value Problem*. Wiley, 1991.
- [Lax68] Peter D. Lax. Integrals of Nonlinear Equations of Evolution and Solitary Waves. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 21 :476–490, January 1968.
- [Lev02] Randall J. Leveque. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, 2002.
- [LM08] Grzegorz Lysik and Slawomir Michalik. Formal solutions of semilinear heat equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 341 :372–385, 2008.
- [LMS99] D. A. Lutz, M. Miyake, and R. Schäfke. On the borel summability of divergent solutions of the heat equation. *Nagoya Mathematical Journal*, 154 :1–29, 1999.
- [LMSW69] Jean Jacques Loeffel, A Martin, Barry Simon, and Arthur Strong Wightman. Padé approximants and the anharmonic oscillator. *Physics Letters B*, 30(9) :686–688, 1969.
- [LR84] Doron S. Lubinsky and P. Rabinowitz. Rates of convergence of Gaussian quadrature for singular integrands. *Mathematics of Computation*, 43(167) :pp. 219–242, 1984.
- [LR14] Michèle Loday-Richaud. Divergent series and differential equations. Part of a book. Submitted., January 2014.
- [Lub14] D. Lubinsky. Reflections on the Baker-Gammel-Wills (Padé). In Gradiimir V. Milovanović and Michael Th. Rassias, editors, *Analytic Number Theory, Approximation Theory, and Special Functions*, pages 561–571. Springer New York, 2014.



- [Lum67] John L. Lumley. The structure of inhomogeneous turbulent flows. In A. Yaglom and V. Tatarski, editors, *Atmospheric Turbulence and Radio Wave Propagation*, pages 166–178, 1967.
- [Lys09a] Grzegorz Lysik. Borel summable solutions of the Burgers equation. *Annales Polonici Mathematici*, 95 :187–197, 2009.
- [Lys09b] Grzegorz Lysik. Formal solutions of Burgers type equations. *Funct. Approx. Comment. Math.*, 40(1) :33–43, 03 2009.
- [Mai03] Edmond Maillet. Sur les séries divergentes et les équations différentielles. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 20 :487–518, 1903.
- [MH92] Masatake Miyake and Yoshiaki Hashimoto. Newton polygons and gevre indices for linear partial differential operators. *Nagoya Math. J.*, 128 :15–47, 1992.
- [MHO13] Kenneth Meyer, Glen Hall, and Dan Offin. *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem*. Applied Mathematical Sciences. Springer New York, 2013.
- [Mic12] Slawomir Michalik. On the Borel summable solutions of multi-dimensional heat equation. *Annales Polonici Mathematici*, 105(2), 2012.
- [Miy91] Masatake Miyake. Newton polygons and formal Gevrey indices in the Cauchy-Gourat-Fuchs type equations. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 43(2) :305–330, 1991.
- [Mur99] James A Murdock. *Perturbations : Theory and Methods*. Classics in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1999.
- [Nev18] Rolf Nevanlinna. *Zur Theorie der asymptotischen Potenzreihen*. Number vol. 1 in *Annales Academiae Scientiarum Fennicae*. Series A. Suomalainen tiedeakatemia, 1918.
- [Nie02] Niels Nielsen. Recherches sur les séries de factorielles. *Annales scientifiques de l'É.N.S*, 19(3) :409–453, 1902.

- [Nie04] Niels Nielsen. Les séries de factorielles et les opérations fondamentales. *Mathematische Annalen*, 59(3) :355–376, 1904.
- [Nö14] Niels Erik Nörlund. Sur les séries de facultés. *Acta Mathematica*, 37(1) :327–387, 1914.
- [Nö24] Niels Erik Nörlund. *Vorlesungen über differenzenrechnung*. Srpinger Verlag, 1924.
- [Nö26] Niels Erik Nörlund. *Leçons sur les séries d'interpolation*. Gauthier-Villard et Cie, 1926.
- [Ō94] Sunao Ōuchi. Formal solutions with Gevrey type estimates of nonlinear partial differential equations. *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, 1(1), 1994.
- [Ō00] Sunao Ōuchi. Asymptotic expansion of singular solutions and the characteristic polygon of linear partial differential equations in the complex domain. *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, 36(4) :457–482, 2000.
- [Pad92] Henri Padé. Sur la représentation approchée d'une fonction par des fractions rationnelles. *ASENS*, 9(3) :3–93, 1892. Thèse.
- [PF07] Walter Pauls and Uriel Frisch. A Borel transform method for locating singularities of Taylor and Fourier series. *Journal of Statistical Physics*, 127 :1095–1119, 2007.
- [Pin02] Salvatore Pincherle. Sulle serie di fattoriali. nota II. *Atti della Reale Accademia dei Lincei, Rendiconti della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Series 5*, 11 :417–426, 1902.
- [Pin14] Salvatore Pincherle. Sulla serie fattoriale generalizzate. *Rend. Circ. Mat.*, 37, 1914. Palermo.
- [Poi92] Henri Poincaré. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, volume 3. Paris : Gauthier-Villars, 1892.
- [Pó29] George Pólya. Untersuchungen über lücken und singularitäten von potenzreihen. *Mathematische Zeitschrift*, 29 :549–640, 1929.

- [Ram93] Jean-Pierre Ramis. *Séries divergentes et théories asymptotiques. Suppl. au Bulletin de la SMF*. Bulletin de la société mathématique de France 121 edition, 1993.
- [Ram12a] Jean-Pierre Ramis. Les développements asymptotiques après Poincaré : continuité et... divergences. *Gazettes des Mathématiques*, 134, octobre 2012.
- [Ram12b] Jean-Pierre Ramis. Poincaré et les développements asymptotiques (première partie). *Gazettes des Mathématiques*, 133, Juillet 2012.
- [Raz05] Dina Razafindralandy. *Contribution à l'étude mathématique et numérique de la simulation des grandes échelles*. PhD thesis, Université de La Rochelle, 2005.
- [Rem91] R. Rempfer. *Kohärente Strukturen und Chaos beim laminar-turbulenten Grenzschichtumschlag*. PhD thesis, 1991.
- [RH13] Dina Razafindralandy and Aziz Hamdouni. Time integration algorithm based on divergent series resummation, for ordinary and partial differential equations. *Journal of Computational Physics*, 236 :56 – 73, 2013.
- [RHA08] Dina Razafindralandy, Aziz Hamdouni, and Cyrille Allery. Numerical divergent series resummation in fluid flow simulation. *European Journal of Computational Mechanics*, 17(4) :431–451, 2008.
- [RS94] Jean-Pierre Ramis and Yasutaka Shibuya. A new proof of multisummability of formal solutions of non linear meromorphic differential equations. *Annales de l'institut Fourier*, 44(3) :811–848, 1994.
- [Sch26] Erwin Schrödinger. Quantisierung als eigenwertproblem. *Annalen der Physik*, 385(13) :437–490, 1926.
- [Shi01] Akira Shirai. Maillet type theorem for nonlinear partial differential equations and Newton polygons. *J. Math. Soc. Japan*, 53(3) :565–587, 07 2001.
- [Sim70] Barry Simon. Coupling constant analyticity for the anharmonic oscillator.(With appendix). *Ann. Physics*, 58 :76–136, 1970.

- [Sir87a] Lawrence Sirovich. Turbulence and the dynamics of coherent structures, Part I : Coherent structures. *Quarterly of Applied Mechanics*, 45(3) :561–571, 1987.
- [Sir87b] Lawrence Sirovich. Turbulence and the dynamics of coherent structures, Part II : Symmetries and transformations. *Quarterly of Applied Mechanics*, 45(3) :573–582, 1987.
- [Sir87c] Lawrence Sirovich. Turbulence and the dynamics of coherent structures, Part III : Dynamics and scaling. *Quarterly of Applied Mechanics*, 45(3) :583–590, 1987.
- [SS91] Jesus Maria Sanz-Serna. Symplectic integrators for hamiltonian problems : an overview. *Acta Numerica*, pages 243–286, 1991.
- [SS92] Jesus Maria Sanz-Serna. The numerical integration of hamiltonian systems. *Institute of Mathematics and its Applications Conference Series*, 39 :437–437, 1992.
- [SSC94] Jesus Maria Sanz-Serna and Manuel P Calvo. *Numerical hamiltonian problems*. Chapman & Hall London, 1994.
- [Sta97] Herbert Stahl. Conjectures around the Baker-Gammel-Wills conjecture. *Constructive Approximation*, 13(2) :287–292, 1997.
- [Sta98] Herbert Stahl. Spurious poles in Padé approximation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 99(1-2) :511–527, 1998.
- [Tho29] F. Thomlinson. Generalized factorial series. *Transactions of the American Mathematical Society*, 31(2), 1929.
- [Tho33] L. M. Milne Thomson. *The Calculus of Finite Differences*. Macmillan and Company, 1933.
- [Tho91] Jean Thomann. Procédés formels et numériques de sommation de séries solutions d'équations différentielles. In *Séries divergentes et procédés de resommation*, volume 91, pages 101–114, 1991. Journées X-UPS.
- [Tho00] Jean Thomann. Formal and numerical summation of formal power series solutions of ODE's. Technical report, CIRM Luminy, 2000.

- [Tho90] Jean Thomann. Resommation des series formelles. solutions d'équations différentielles linéaires ordinaires du second ordre dans le champ complexe au voisinage de singularités irrégulières. *Numerische Mathematik*, 58 :503–536, 1989/90.
- [VCDPF98] Paolo Vannucci, Bruno Cochelin, Nouredine Damil, and Michel Potier-Ferry. An asymptotic-numerical method to compute bifurcating branches. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 41(8) :1365–1389, 1998.
- [VD64] Milton Van Dyke. *Perturbation methods in fluid mechanics*, volume 8 of *Applied mathematics and mechanics*. Academic Press, 1964.
- [VI87] Jeanette Van Iseghem. *Approximants de Padé vectoriels*. PhD thesis, Université de Lille 1, 1987.
- [Was02] Wolfgang Wasow. *Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations*. Dover phoenix editions. Dover, 2002.
- [Wat12a] George Neville Watson. A theory of asymptotic series. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 211(471-483) :279–313, 1912.
- [Wat12b] George Neville Watson. The transformation of an asymptotic series into a convergent series of inverse factorials [memoir crowned by the danish royal academy of science]. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 34(1) :41–88, 1912.
- [Wen10] Ernst Joachim Weniger. Summation of divergent power series by means of factorial series. *Journal of Applied Numerical Mathematics*, 60(12) :1429–1441, dec 2010.
- [Wes09] Pieter Wesseling. *Principles of Computational Fluid Dynamics*. Springer Series in Computational Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2009.
- [XB90] Guo-liang Xu and Adhemar Bultheel. Matrix Padé approximation : definitions and properties. *Linear Algebra and its Applications*, 137–138 :67 – 136, 1990.

- 
- [Yon90] Akiyoshi Yonemura. *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, 26(1) :197–204, 1990.

# Résumé

Les systèmes dynamiques qui évoluent sur un grand intervalle de temps (dynamique moléculaire, prédiction astronomique, turbulence, ...) occupent une place importante dans le domaine des sciences de l'ingénieur. Leur résolution numérique constitue, jusqu'à l'heure actuelle, un défi. En effet, la simulation de la solution nécessite un solveur non seulement rapide mais qui respecte aussi les propriétés physiques du problème, pour garantir la stabilité. Dans cette thèse, on se propose d'étudier, vis-à-vis de cette problématique, un schéma d'intégration temporelle basé sur la décomposition de la solution en série temporelle, suivie de la technique de resommation de Borel des séries divergentes. On analyse alors la rapidité du schéma sur des problèmes modèles. Ensuite, on montre sa capacité à préserver la structure des équations (symplecticité, iso-spectralité, conservation de l'énergie, ...) à un ordre arbitrairement élevé. Par suite, on applique le schéma à la résolution d'équations aux dérivées partielles issues de la mécanique, dont les équations de la chaleur, de Burgers et de Navier-Stokes. Pour cela, on associe le schéma à une méthode de discrétisation par éléments finis en espace. Enfin, dans le but de rendre l'algorithme plus robuste, on s'intéresse à la représentation de la somme de Borel par une série de factorielle généralisée.

# Abstract

Dynamical systems which evolve in a large time interval (molecular dynamic, astronomical prediction, turbulence, ...) take an important place in engineering science. Their numerical resolution has so far constituted a challenge. Indeed, the simulation of the solution requires a solver which is not only fast but also respects the physical properties of the problem, to ensure the stability. In this thesis, we propose to study, regarding this issue, a time integration scheme based on the decomposition of the solution into time series, followed by Borel's resummation technique of divergent series. We analyse the speed of scheme on model problems. Next, we show its capability to preserve the structure of the equation (symplecticity, iso-spectrality, conservation of energy, ...) up to an arbitrary high order. Thereafter, we use the scheme to resolve partial differential equations coming from mechanics, including the two-dimensional heat equation, Burgers equation and the Navier-Stokes equation. To this aim, we choose a finite element method for space discretisation. Finally, and in order to make the algorithm more robust, we are interested in the representation of the Borel sum by a generalized factorials series.